N° d'enregistrement
au C.N.R.S. :

THESE

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS VI

par

Alain CHAILLEUX

Ingénieur I.N S.A.

pour obtenir le titre de

DOCTEUR INGENIEUR

Sujet de la Thèse

ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DE LA STABILITE DE POUTRES DROITES ELASTIQUES EN MATERIAUX COMPOSITES CHARGEES AXIALEMENT

Soutenue le 2 Mai 1973 devant la Commission d'Examen:

Monsieur le Professeur	**GERMAIN**	**Président**
Messieurs les Professeurs	**SIESTRUNCK**	**Examinateur**
	DUVAUT	**Examinateur**
Monsieur VERCHERY		**Invité**

N° d'enregistrement
au C.N.R.S. :

THESE

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS VI

par

Alain CHAILLEUX

Ingénieur I.N.S.A.

pour obtenir le titre de

DOCTEUR INGENIEUR

Sujet de la Thèse

ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DE LA STABILITE DE POUTRES DROITES ELASTIQUES EN MATERIAUX COMPOSITES CHARGEES AXIALEMENT

Soutenue le 2 Mai 1973 devant la Commission d'Examen:

Monsieur le Professeur	**GERMAIN**	**Président**
Messieurs les Professeurs	**SIESTRUNCK**	**Examinateur**
	DUVAUT	**Examinateur**
Monsieur VERCHERY		**Invité**

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A ma femme

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548022_0032

AVANT - PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé dans le cadre du Groupe de Recherche en Matériaux commun entre l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris et l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées.

Je remercie Monsieur le Professeur CERMAIN, Membre de l'Institut, d'avoir accepté de présider le Jury d'Examen.

Monsieur le Professeur SIESTRUNCK, Directeur du laboratoire de Mécanique Physique de Saint-Cyr, et Monsieur le Professeur DUVAUT, de l'Université de Paris XIII ont bien voulu participer au Jury. Qu'ils en soient remerciés.

Monsieur le Professeur GAUTHIER, Directeur de l'Institut de Mécanique Théorique et Appliquée, s'est particulièrement intéressé à ce travail et s'est joint au Jury. Je l'en remercie sincèrement.

Monsieur VERCHERY, responsable du groupe "Mécanique des Composites" au Groupe Commun de Recherche E.N.S.M.P.-E.N.S.T.A. m'a initié à la recherche et a dirigé ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma cordiale reconnaissance.

J'adresse mes remerciements à Monsieur HANS pour l'aide qu'il m'a apportée tout au long de la réalisation du programme expérimental.

Je remercie également tous mes camarades chercheurs et techniciens du Groupe Commun de Recherche E.N.S.M.P.-E.N.S.T.A., du groupe "Composites" du Centre des Matériaux de l'E.N.S.M.P. ainsi que mes collègues du Laboratoire Matériaux-Structures de l'E.N.S.T.A., pour l'aide amicale et fructueuse qu'ils m'ont toujours apportée.

Enfin, je remercie vivement Mademoiselle de HODY qui a assuré, avec toute sa patience et sa compétence, la frappe de ce mémoire, réalisé par le Service de Documentation et Edition de l'E.N.S.T.A.

RESUME p. 1

NOTATIONS 2

INTRODUCTION 5

CHAPITRE I. MISE EN EQUATION D'UNE POUTRE EN MATERIAU COMPOSITE DE SECTION RECTANGULAIRE. 9

I.1. Choix du type d'équation pour l'étude du flambage

I.2. Hypothèses de calcul

I.3. Loi de comportement globale de la poutre

I.4. Energie potentielle de la poutre déformée

I.5. Equations d'équilibre et conditions aux limites

I.6. Conclusions.

CHAPITRE II. STABILITE D'UNE POUTRE STRATIFIEE CHARGEE AXIALEMENT PAR UNE FORCE CONSTANTE. 39

II.1. Types des poutres étudiées

II.2. Conditions aux limites étudiées

II.3. Equations d'équilibre en u_3° et β. Solutions générales

II.4. Schéma de la méthode de calcul des charges critiques

II.5. Résultats

II.6. Conclusions du Chapitre II.

CHAPITRE III. MESURE DES CHARGES CRITIQUES : ESSAI DE JUSTIFICATION THEORIQUE DE DEUX METHODES UTILISEES DANS LA PRATIQUE. 61

III.1. Type d'imperfections

III.2. Equations d'une poutre composite munie d'imperfections (courbure initiale)

III.3. Détermination de λ_c par la méthode statique de Southwell

III.4. Méthode des vibrations libres de flexion

III.5. Conclusions du Chapitre III

CHAPITRE IV. DISPOSITIF EXPERIMENTAL ET DETERMINATION DES CONDITIONS OPTIMALES DE MESURE. 103

IV.1. Dispositif expérimental

IV.2. Détermination des conditions expérimentales

IV.3. Précision des mesures de la charge critique λ_c

IV.4. Conclusions du Chapitre IV

CHAPITRE V. RESULTATS EXPERIMENTAUX. 115

V.1. Nature des échantillons

V.2. Résultats

V.3. Discussion des résultats et conclusions.

CONCLUSIONS GENERALES. 129

ANNEXE A.1 : Calcul des rigidités de chaque couche en fonction des constantes élastiques classiques 133

ANNEXE A.II: Programme de calcul de λ_c 137

ANNEXE A.III: Mesure des rigidités nécessaires pour le calcul des charges critiques 139

ANNEXE A.IV: Montage expérimental 145

ANNEXE A.V : Etudes des conditions experimentales 151

ANNEXE A.VI: Résultats expérimentaux. 157

BIBLIOGRAPHIE 179

R E S U M E

A l'aide du modèle des milieux stratifiés élastiques anisotropes, on étudie la stabilité de poutres droites composites chargées axialement par une force constante. La loi de comportement globale révèle divers couplages physiques entre les différents modes de déformation, dont on étudie l'influence sur le comportement de la poutre avant flambage et sur la valeur des charges critiques.

On présente, sous certaines hypothèses restrictives, une justification théorique de deux méthodes pratiques de mesure des charges critiques -méthode du graphe de Southwell et méthode des vibrations transversales-.

Afin de déterminer les conditions optimales d'expérimentation et des formules de correction, on analyse en détail les perturbations introduites par la mesure.

Les résultats expérimentaux confirment d'une part que le modèle des milieux stratifiés représente, avec une excellente précision, une poutre composite, d'autre part que les deux méthodes expérimentales de mesure des charges critiques de flambage sont correctes.

Le travail exposé dans ce mémoire a été partiellement soutenu par un programme de recherche sur le Flambement des Structures Composites, financé par la Direction des Recherches et des Moyens d'Essai (Convention N° 71-246), sous la responsabilité scientifique de Monsieur G. VERCHERY.

N O T A T I O N S

$\vec{x}_i$	système d'axe repérant la poutre
$\vec{x}_i^k$	système d'axe propre de la couche n° k
$\theta_k = (\vec{x}_1, \vec{x}_1^k)$	
$h_k - h_{k-1}$	épaisseur de la couche n° k
h	épaisseur de la poutre
L	longueur de la poutre
b	largeur de la poutre
$\rho(x_3)$	masse volumique moyenne
d	diamètre des fibres
$\xi = Ef/Em$	
$\bar{E}$, $\tilde{E}$	modules d'Young
$\bar{D}$, $\tilde{D}$	rigidités de flexion
V_f	fraction volumique des fibres
E_f , E_m	Modules d'Young des fibres et de la matrice respectivement
I_f , I_m	inerties de flexion des fibres et de la matrice respect.
$C_{ijkl}^{(k)}$	composante du tenseur d'élasticité de la couche n° k
$R_{ij}^{(k)}$	rigidité de la couche n° k
σ_{ij}	composante du tenseur des contraintes de Cauchy
T_{ij}	composante du tenseur des contraintes de Lagrange
ε_{ij}	composante du tenseur des déformations de Green
u_i	déplacement de la poutre au point (x_1, x_2, x_3)
u_i°	déplacement de la ligne moyenne $(x_2 = x_3 = 0)$
u_i^T	déplacements totaux à partir de la position rectiligne
$\bar{u}_i$	déplacements initiaux à partir de la position rectiligne
α, β, γ	rotations
N, H, Q, M, $\mathcal{R}$, T	forces et moments résultants appliqués à une section normale de la poutre

A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} rigidités globales de la poutre

D^* rigidité de flexion réduite

λ intensité de la charge de compression

$\Omega = \lambda/D^* \left(1 - \frac{\lambda}{A_{55}}\right)$

λ_c charge critique de flambage

λ_n $n^{ième}$ charge critique

$\overline{\lambda}$ charge critique mesurée par la méthode statique

$\tilde{\lambda}$ charge critique mesurée par la méthode dynamique

V énergie potentielle de déformation

U énergie potentielle des efforts extérieurs

$\mathcal{E}$ énergie potentielle totale

E_c énergie cinétique

$\mathcal{L}$ Lagrangien

δ flèche au centre de la poutre

δ_o flèche initiale au centre de la poutre

$^r u_3^\circ$, $^r\beta$ modes de flambage n° r de la poutre parfaite

$^r\Omega$ valeur de Ω correspondant au mode n° r

Krs défini par la relation (100)

a_r, $\overline{a}_r$, b_r, $\overline{b}_r$ définis par la relation (106)

$w_1(x_1)$ courbure de flexion de la poutre au point x_1

e excentricité

η terme de couplage

C_i, ξ_i, μ_i constantes

$\omega_{n|\lambda}$ $n^{ième}$ pulsation propre de la poutre chargée par λ

$f_1 = \omega_{1|\lambda}/2\pi$ première fréquence propre de la poutre chargée par λ

I_ρ, J_ρ, K_ρ inerties de translation, de couplage, de rotation de la poutre

E écart défini au paragraphe II.10.

I N T R O D U C T I O N

L'évolution rapide des techniques de pointe comme l'aéronautique et l'aérospatiale nécessite l'utilisation de structures de plus en plus performantes et légères. L'utilisation des aciers à hautes résistances ou hautes limites élastiques, et des alliages légers a permis de réaliser des structures optimisées dans leur forme (panneaux "sandwiches" par exemple), mais ces progrès semblent atteindre une certaine limite. Ceci a révélé la nécessité de mettre au point des matériaux nouveaux, et parmi eux les matériaux composites dont certaines propriétés mécaniques spécifiques dépassent celles des meilleurs alliages légers. Ces matériaux se composent de deux constituants de base, d'une part les éléments de renforcement, rigides et fragiles, qui confèrent une grande résistance à l'ensemble du matériau, d'autre part une matrice ductile qui enrobe les éléments de renforcement et répartit les contraintes au sein du matériau, rendant son utilisation possible.

L'originalité des matériaux composites provient de ses deux caractéristiques fondamentales :

- l'hétérogénéité due à la différence des propriétés des constituants,
- l'anisotropie, liée à la forme et à l'arrangement des éléments de renforcement (en général des fibres longues ou courtes).

En conséquence, la loi de comportement d'un tel matériau est plus compliquée que celle des matériaux classiques homogènes et isotropes, même dans le domaine élastique (1). Elle comporte des couplages entre les différents degrés de liberté de la structure. Ces couplages sont d'origine physique et viennent s'ajouter à ceux dus à la géométrie apparaissant aussi dans les structures constituées en matériaux classiques.

Pourquoi étudier la stabilité en flambage des structures en matériaux composites ? Le problème de la stabilité se pose chaque fois qu'une pièce est très élancée dans une ou deux directions. Or les matériaux composites à hautes propriétés mécaniques sont toujours employés dans de telles structures (tiges, plaques, coques) parce que c'est sous cette forme qu'ils sont les plus performants, et que la technologie actuelle nous les donne (2). La stabilité élastique est alors un des principaux critères de dimensionnement. Il apparaît donc primordial à l'utilisateur de bien connaître ce phénomène. Pour notre part, nous nous sommes attachés à l'étude théorique et expérimentale de poutres droites élastiques en matériaux composites, chargées axialement.

Il est curieux de noter que peu de recherches aient été faites sur la stabilité élastique, c'est-à-dire le flambage, des barres en matériaux composites chargées axialement (3). Par contre, la littérature nous fournit plusieurs travaux sur les plaques (4 à 13), les coques (14 à 16) constituées avec de tels matériaux. Certes sont-ils utilisés au mieux lorsqu'ils constituent des structures bidimensionnelles (plaques ou coques), en ce sens que les renforcements sous forme de fibres, qui sont donnés par la technologie actuelle, permettent de consolider la pièce dans les directions laissées au choix de l'utilisateur. Mais ceci est aussi vrai dans le cas de tiges où le renforcement unidirectionnel confère des rigidités de flexion et de traction excellentes ; on peut aussi être amené à des renforcements croisés pour des barres soumises à la torsion par exemple. Les structures réticulées de barres peuvent avoir alors dans certains cas des avantages sur des structures telles que des plaques ou des coques.

D'un point de vue plus académique, il est intéressant d'étudier le flambage sur des barres composites, car dans un premier temps, ce phénomène est plus simple que pour des plaques ou des coques. Les calculs peuvent en effet être poussés suffisamment loin pour permettre de dégager les phénomènes nouveaux qui apparaissent, et dont l'interprétation est beaucoup moins aisée dans les plaques par exemple.

Nous ne considérons ici que des barreaux hétérogènes à section rectangulaire constante, découpés dans des plaques composites stratifiées à renforcements variés.

Dans le premier chapitre, nous utilisons le modèle des milieux minces stratifiés, en tenant compte du cisaillement transversal, pour mettre en équation la poutre composite chargée axialement par une force constante.

Dans le second chapitre, nous calculons les charges pour lesquelles il y a instabilité. Nous mettons en évidence les phénomènes nouveaux dus aux caractéristiques propres des matériaux composites.

Le troisième chapitre présente, sous certaines hypothèses restrictives, une justification de deux méthodes de mesure de la charge critique développées antérieurement pour les structures classiques : la méthode du graphe de Southwell, qui permet d'éliminer l'influence des imperfections, la méthode des vibrations transversales, qui permet d'obtenir la charge critique à partir des mesures à faible charge.

Nous exposons dans le quatrième chapitre, la mise au point de la technique expérimentale, en décrivant le dispositif de test et en étudiant l'influence des perturbations introduites dans les mesures. Nous donnons alors les conditions optimales d'expérimentation et des formules de correction.

Enfin, dans le cinquième chapitre, nous résumons les résultats expérimentaux, puis nous discutons de la validité des deux techniques de mesure et de l'accord entre la théorie développée et les résultats de l'expérience.

En conclusion, nous proposons les méthodes expérimentales utilisées au cours de ce travail comme moyen d'étude de structures plus complexes, évitant les dangers d'une extrapolation hâtive de la résistance des matériaux classiques.

N.B. : Il ne nous a pas été possible d'obtenir certains types de renforcement par suite de difficultés technologiques actuellement insurmontables. En conséquence, la théorie exposée est un peu plus générale que ne l'aurait nécessité l'interprétation de nos seuls résultats expérimentaux. Nous avons jugé cependant utile de donner tous nos résultats théoriques afin de ne pas nuire à la généralité de l'exposé.

CHAPITRE I

MISE EN EQUATION D'UNE POUTRE EN MATERIAU COMPOSITE DE SECTION RECTANGULAIRE

Nous allons, dans ce chapitre, effectuer la mise en équation d'une poutre composite en reprenant le modèle des plaques stratifiées qui fut donné pour la première fois par Lekhnitskii (17) puis généralisé par Reissner et Stavsky (18-19). Cette théorie fut ensuite étendue aux coques par Dong et al. (20) et Ambartsumyan (21). Elle est très utile pour les mécaniciens des matériaux composites car c'est pratiquement la seule qui permette de faire des calculs sur des structures en composites (22).

Dans le cas particulier des barres droites, nous allons reprendre chaque hypothèse conduisant au modèle proposé, et analyser leur validité. Le but que nous nous proposons (étude du flambage) nous conduira au choix de certaines hypothèses sur les déformations (expressions en fonction des déplacements) et sur la nature des contraintes à négliger. Nous serons alors conduits à une formulation qui diffère de celle qui est donnée dans les travaux précités (18-19-21-22).

I.1. CHOIX DU TYPE D'EQUATION POUR L'ETUDE DU FLAMBAGE.

Lorsqu'un corps élastique a une forme géométrique suffisamment compacte, les déplacements et les déformations sont en général très petits. Les lois de la théorie de l'élasticité linéaire s'appliquent bien, et les déplacements sont proportionnels aux forces appliquées. L'état d'équilibre est unique pour un chargement donné et correspond au minimum de l'énergie potentielle totale du système.

Il n'en est plus de même lorsque le corps est élancé, c'est-à-dire lorsqu'une ou deux de ses dimensions est beaucoup plus grande que la troisième. C'est le cas des tiges, des plaques et des coques. Certains déplacements peuvent alors être grands, bien que les déformations restent localement très petites. La loi de Hooke est toujours vraie, mais on ne peut plus confondre position initiale et position finale, et les déformations ne sont plus fonctions linéaires des déplacements. Les équations qui relient forces et déplacements ne sont plus linéaires et la solution d'un problème donné n'est plus toujours unique. A chaque solution, l'énergie potentielle totale du système est extrêmale. Certains de ces extremums sont des minimums (position d'équilibre stable), d'autres des maximums (position d'équilibre instable). En général, lorsque le chargement est faible, il n'existe qu'une seule solution stable. Mais à partir d'une certaine valeur de la charge dite critique, deux ou plusieurs extremums de l'énergie potentielle totale du système apparaissent et le corps élastique peut changer de branche d'équilibre. Si ce passage est continu par rapport aux déplacements, on dit que l'on a un point de bifurcation d'équilibre. Par contre, s'il est discontinu, on dit que l'on a un saut d'équilibre. Nous voyons bien que le dépassement de la charge critique (point de bifurcation ou saut d'équilibre) peut conduire à des déplacements dans la pièce suffisamment grands pour être prohibitifs (fracture ou écroulement de la structure).

La première étude de stabilité d'un corps élastique a été faite par L. Euler (23) en 1794 sur une tige mince chargée axialement. Cet auteur a mis en évidence le phénomène de flambage, à l'aide de

l'équation non linéaire complète des poutres (valeur exacte du rayon de courbure), qui permet de rendre compte de très grands déplacements. Notons que le point de bifurcation peut être obtenu à l'aide de l'équation linéarisée (24).

Que faut-il conclure de ceci ? Il apparaît que le problème ne peut être résolu qu'à l'aide d'équations prenant en compte des déplacements suffisamment grands. Etant donné que nous ne nous préoccupons que du comportement avant la charge critique (si elle existe) et de la détermination de cette charge critique, nous choisirons des expressions des déformations en fonction des déplacements valables dans ce domaine.

Le deuxième but que nous nous fixons est de poser le problème de la manière la plus simple possible. Les caractéristiques géométriques d'une poutre élancée nous permettent en effet de construire un modèle mathématique simple en ce sens que nous nous efforçons de remplacer le corps tridimensionnel réel par un milieu unidimensionnel muni de certaines propriétés déterminées à partir de celles du corps réel. Cette démarche est classique en mécanique et conduit à un modèle qui, bien qu'approché, a le mérite de permettre des calculs simples dont les résultats seront à vérifier avec l'expérience.

I.2. HYPOTHESES DE CALCUL.

I.2.1. Réduction du matériau composite à un matériau stratifié.

I.2.1.1. Structure des poutres étudiées.

Les matériaux composites étudiés sont à matrice métallique (aluminium et alliage d'aluminium), ou organique (résines epoxy). Les éléments de renforcement sont de trois types :

- fibres longues (bore, verre, graphite)
- fibres courtes (graphite)
- tissus (verre).

L'élément de base est la monocouche. Une monocouche est formée de fibres parallèles et situées à peu près dans le même plan (Fig. 1.a) ou d'un tissu de verre (Fig. 1.b), ces éléments de renforcement étant noyés dans la matrice.

Des monocouches à renforts parallèles sont groupées en couches unidirectionnelles caractérisées par l'orientation du renfort.

Le barreau est constitué de n couches d'orientations différentes (Fig. 2).

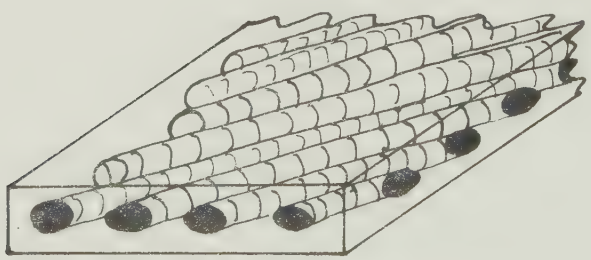

Figure 1.a

Monocouche renforcée par des fibres longues.

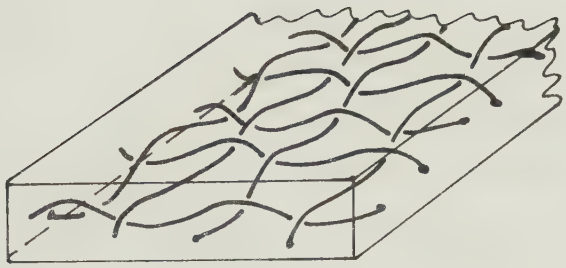

Figure 1.b

Monocouche renforcée par un tissu.

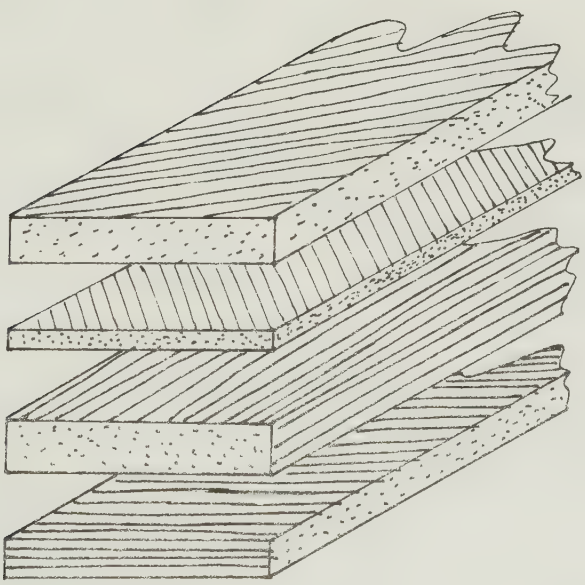

Figure 2

I.2.1.2. Notations.

Cf. Figures 3 et 4.

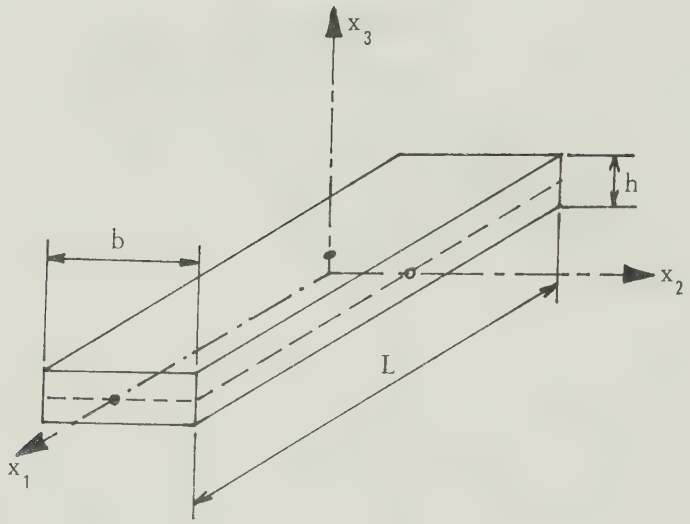

Figure 3

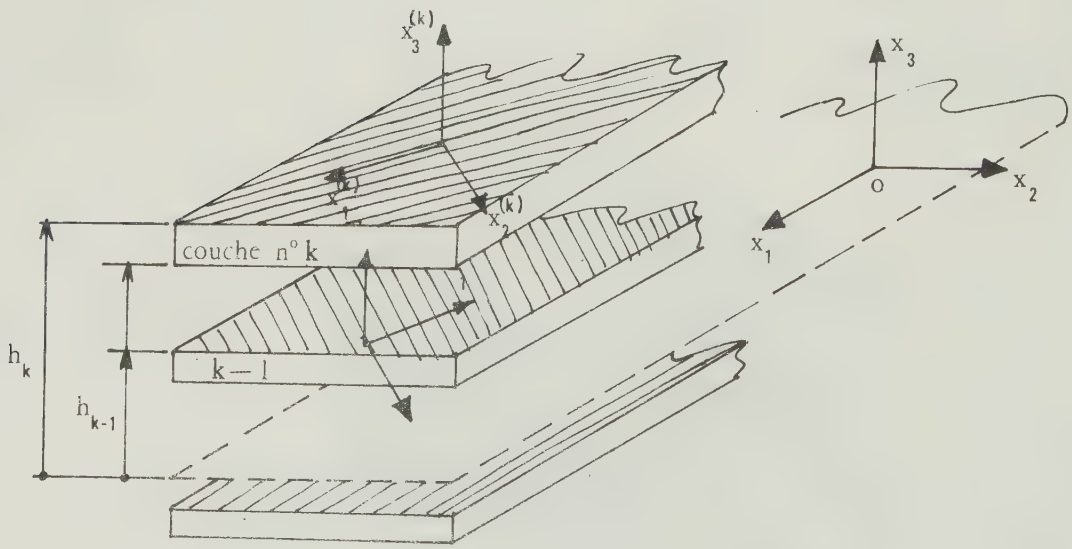

Figure 4

L : longueur de la poutre
b : largeur de la poutre
h : épaisseur totale de la poutre
k : indice repérant la couche n° k

$h_k - h_{k-1}$: épaisseur de la couche n° k

θ_k : angle entre la direction $\vec{x}_1$ longitudinale de la poutre et la direction des fibres de renforcement dans la couche n° k

n : nombre de couches.

La poutre est repérée par un système d'axes $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

$\vec{x}_1$ est parallèle à l'axe longitudinal de la poutre

$\vec{x}_3$ est perpendiculaire aux plans de stratification de la poutre.

O est situé sur la fibre géométrique moyenne de la poutre.

Chaque couche k est repérée par un système $(O, \vec{x}_1^k, \vec{x}_2^k, \vec{x}_3^k)$.

$\vec{x}_1^k$ est parallèle à la direction des fibres de la couche (k),

$\vec{x}_3^k = \vec{x}_3$ pour toutes les couches.

Dans le cas de couches renforcées par tissus de verre, $\vec{x}_1^k$ et $\vec{x}_2^k$ sont parallèles à la trame et à la chaîne.

Enfin $$\theta_k = (\vec{x}_1, \vec{x}_1^k)$$

I.2.1.3. Hypothèse des couches homogènes.

La micromécanique des milieux hétérogènes ne permet pas, actuellement, de connaître la répartition exacte des contraintes et des déformations dans un matériau tel que celui que nous avons décrit ci-dessus.

Rappelons d'autre part que notre but est de construire un modèle mathématique rendant compte correctement du comportement global de la poutre, même si ce modèle ignore les effets locaux dus aux hétérogénéités.

Nous sommes donc amenés à faire l'hypothèse suivante :

Le comportement global d'une couche renforcée par des fibres parallèles est approximativement celui d'une couche homogène, anisotrope, de même épaisseur, et à comportement élastique linéaire.

La loi de comportement d'une telle couche s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C^{(k)}_{ijkl} \; \varepsilon_{kl} \qquad \text{pour la couche n° k} \qquad (1)$$

(dans le repère $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$),

avec σ_{ij} = tenseur des contraintes

ε_{ij} = tenseur des déformations

$C^{(k)}_{ijkl}$ = tenseur de rigidité du matériau de la couche k.

Cette hypothèse a souvent été faite par les mécaniciens des matériaux composites, initialement pour des plaques en bois contreplaqué (matériau composite fibreux naturel) (17), puis pour les matériaux composites modernes (22).

Notons que la relation (1) ne donne pas la valeur exacte des contraintes et des déformations en un point (x^k_1, x^k_2, x^k_3) de la couche (k) mais des grandeurs moyennes sur toute l'épaisseur de la couche.

I.2.1.4. Détermination des coefficients de rigidité $C^{(k)}_{ijkl}$.

De nombreux auteurs (Cf ref. 22 pp. 74-77, et plus récemment ref. 25) ont essayé de calculer, à l'aide de la micromécanique des milieux hétérogènes, les coefficients $C^{(k)}_{ijkl}$ à partir des caractéristiques géométriques et mécaniques des constituants de la couche n° k. Ces calculs ont permis soit de déterminer certains des coefficients $C^{(k)}_{ijkl}$, soit de les borner supérieurement et inférieurement.

En ce qui nous concerne, l'idée principale qu'il faut retenir de ces travaux est que le comportement élastique global du matériau

de la couche k est bien rendu par un tenseur $C^{(k)}_{ijkl}$ à symétrie orthotrope. Donc parmi les 81 coefficients du tenseur de rigidité $C^{(k)}_{ijkl}$, neuf seulement sont indépendants. Les plans principaux de symétrie élastique orthotrope sont parallèles aux trois axes $\vec{x}^k_1$, $\vec{x}^k_2$, $\vec{x}^k_3$ pour chaque couche (k).

I.2.1.5. Validité de l'hypothèse des couches homogènes et élastiques.

a) Comportement des constituants.

Sont-ils vraiment élastiques linéaires ?

. C'est vrai pour les fibres qui sont des matériaux très rigides (corps élastiques fragiles, sans plasticité).

. Matrices métalliques : ce sont en général des métaux assez ductiles (aluminium et alliages, magnésium et alliages).
Lorsque le composite se déforme, il apparaît des concentrations de contraintes au voisinage des hétérogénéités, c'est-à-dire des fibres. L'apparition des déformations plastiques dans la matrice métallique peut donc avoir lieu pour des niveaux de charge relativement faibles de l'ensemble du composite. Ce phénomène peut être très marqué pour certaines sollicitations (dilatation thermique par exemple (26-27)).

. Matrices en résine epoxy : l'élasticité linéaire est une approximation extrêmement grossière du comportement des résines, mais la contribution de la résine aux propriétés mécaniques du composite est négligeable (rigidité de la résine très faible par rapport à la rigidité des fibres).

. Interface fibre-matrice : le comportement des interfaces est encore assez mal connu. Dans le cas des composites à matrice métallique, il semble que l'adhésion soit très bonne, au moins au niveau de contrainte où nous nous limitons. Dans les cas des composites à matrice résine, cette adhésion peut être moins parfaite, surtout avec des fibres en graphite.

. Conclusion : pour voir le rôle des constituants que nous avons énumérés ci-dessus, le composite a été testé globalement. Ces travaux (28-29-30) ont permis de montrer le comportement quasi élastique linéaire de nos matériaux en flexion, traction et torsion.

b) Influence de l'hétérogénéité des couches.

Si la dimension des hétérogénéités (diamètre des fibres) est petite devant l'épaisseur h_k de la couche, les contraintes moyennes σ_{ij} et les déformations moyennes ε_{ij} que nous avons définies au paragraphe précédent sont une bonne représentation de l'état global du matériau.

Par contre, si le diamètre des fibres est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche, il n'en est plus de même (fibres de bore, Ø 100 microns).

Afin de voir l'influence de l'hétérogénéité sur la valeur des rigidités $C^{(k)}_{ijkl}$, calculons la contribution d'une couche (k) à la rigidité de flexion dans le sens des fibres de la barre composite. La couche (k) est formée d'une monocouche de fibres de diamètre d, et son centre est situé à la distance z_k de l'axe moyen de la poutre (Fig. 5). La fraction volumique de fibre (V_f) est de 50 % par exemple.

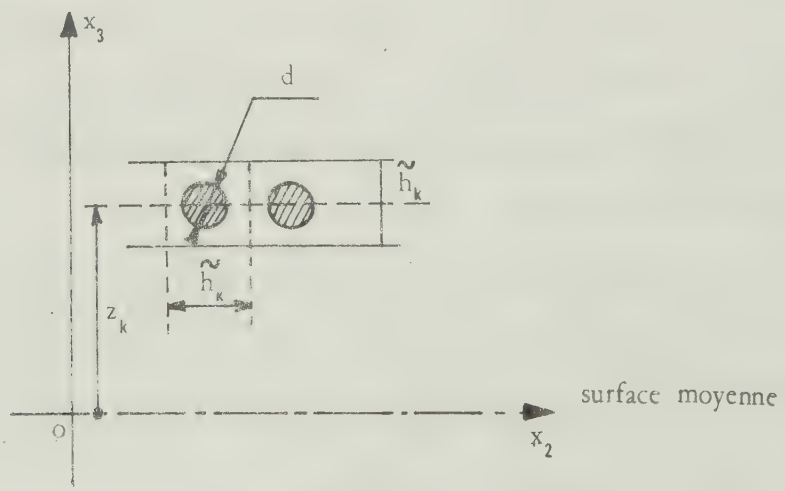

Figure 5

E_m, I_m et E_f, I_f sont les modules d'Young et les inerties surfaciques de flexion respectivement de la matrice et des fibres pour une unité de largeur de la couche (k).

La contribution de la couche (k) à la rigidité de flexion par unité de largeur de la poutre, dans l'hypothèse des couches homogènes, est:

$$\bar{D} = \bar{E} \left(\frac{\tilde{h}_k^3}{12} + \tilde{h}_k \, z_k^2 \right) \qquad (2)$$

avec $\bar{E}$ donné par la loi des mélanges :

$$\bar{E} = V_f \, E_f + (1-V_f) E_m \qquad (3)$$

La contribution exacte de la couche (k) à la rigidité de flexion de la poutre pour une unité de largeur est :

$$\tilde{D} = E_f \, I_f + E_m \, I_m \qquad (4)$$

Nous avons alors, tous calculs faits :

$$\frac{\tilde{D}}{\bar{D}} = 1 - \frac{\frac{\pi}{4} (\xi - 1) \frac{\tilde{h}_k^2}{12 d^2} - \frac{1}{16} \frac{d^4}{\tilde{h}_k^4}}{\left[\frac{1}{12} + \frac{z_k^2}{\tilde{h}_k^2} \right] \left[1 + (\xi - 1) \frac{\pi}{4} \frac{d^2}{\tilde{h}_k^2} \right]} \qquad (5)$$

avec $$\xi = E_f / E_m \qquad (6)$$

Pour $V_f = 50\ \%$, on a $\frac{d}{\tilde{h}_k} = \frac{2}{\pi}$.

Nous donnons dans le tableau (I.1) les valeurs du rapport $\frac{\tilde{D} - \bar{D}}{\bar{D}}$ en fonction de z_k pour deux types classiques de composites :

aluminium-bore : $\xi = 6$

résine-bore : $\xi = 100$

TABLEAU I.1

z_k	$\frac{\tilde{D} - \bar{D}}{\bar{D}}$ (Al-B)	$\frac{\tilde{D} - \bar{D}}{\bar{D}}$ (résine-B)
0 $\tilde{h}_k$	37 %	53 %
0,5$\tilde{h}_k$	8,7	13,2
1 $\tilde{h}_k$	2,9	4,1
1,5$\tilde{h}_k$	1,35	1,9
2 $\tilde{h}_k$	0,77	1,1
2,5$\tilde{h}_k$	0,46	0,7

Ces résultats sont consignés sur le graphique de la Figure 6.

Si l'influence de l'hétérogénéité d'une couche est importante sur ses caractéristiques lorsqu'elle se situe au voisinage immédiat de la ligne moyenne de la poutre ($z_k = 0$), elle devient rapidement très faible ($z_k > 2\,\tilde{h}_k$). Il faudrait évidemment aussi vérifier ce fait pour une flexion transversale par rapport aux fibres et dans une torsion. Malheureusement dans ces deux cas les calculs sont beaucoup trop compliqués.

Pour conclure, étant donné que les barres ont en pratique au moins huit à dix couches de fibres, nous considérons comme négligeable l'influence de l'hétérogénéité des couches voisines de la surface moyenne sur la rigidité totale de l'échantillon.

I.2.1.6. Conclusions.

Bien qu'il soit difficile de montrer la validité de l'hypothèse de couches homogènes, il semble qu'elle soit correcte dans la pratique.

Nous assimilons donc la barre composite à une barre stratifiée, ayant n couches homogènes, élastiques, à symétrie orthotrope, et dont les axes principaux de symétrie sont parallèles au repère propre $\vec{x}_k$ de chaque couche (k).

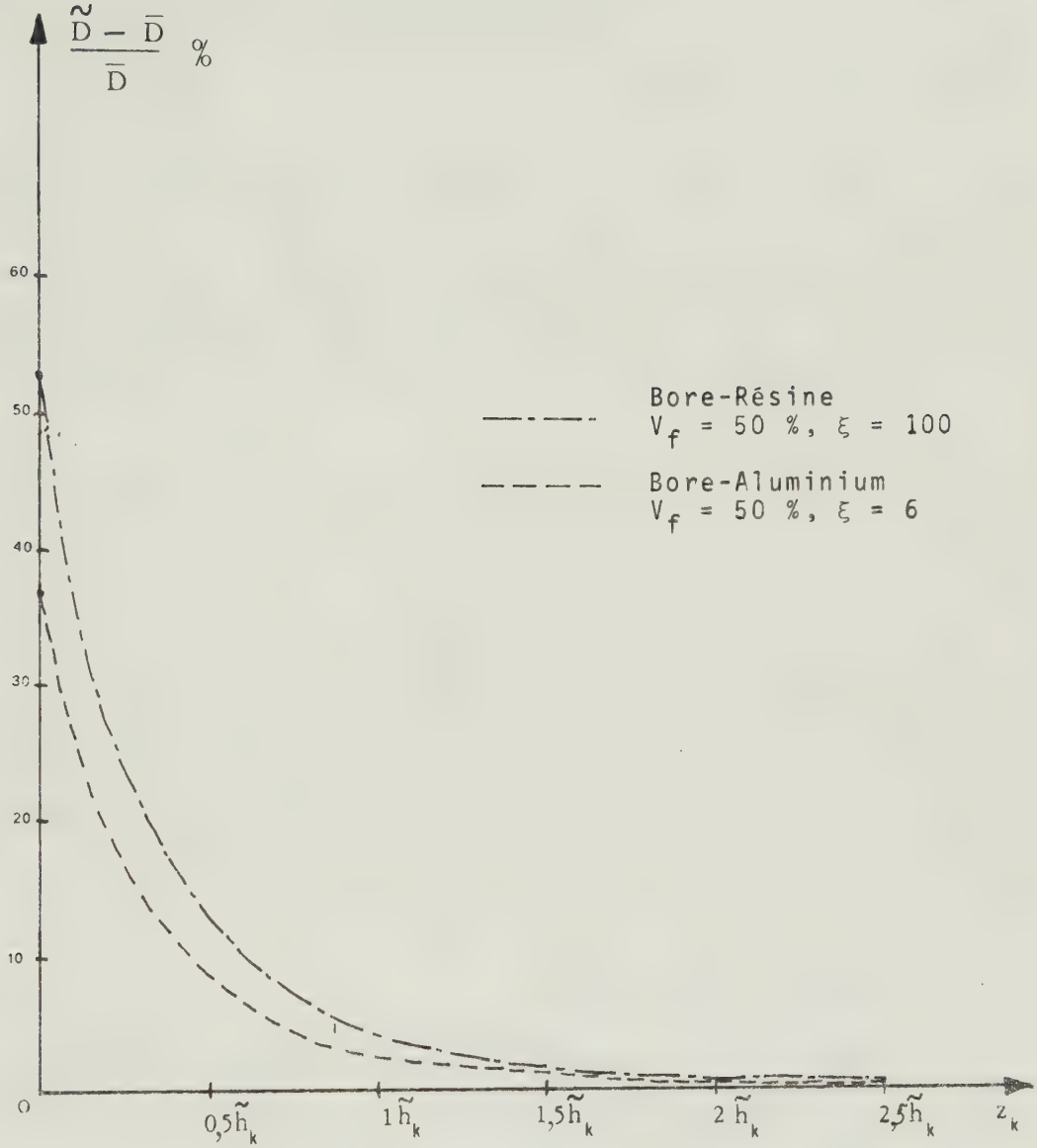
$\frac{\tilde{D} - \bar{D}}{\bar{D}}$ %
60
50
40
30
20
10
0
Bore-Résine
V_f = 50 %, ξ = 100
Bore-Aluminium
V_f = 50 %, ξ = 6
0,5$\tilde{h}_k$
1$\tilde{h}_k$
1,5$\tilde{h}_k$
2$\tilde{h}_k$
2,5$\tilde{h}_k$
z_k

Figure 6

I.2.2. Domaine de validité de la théorie proposée.

Nous avons vu dans le paragraphe I.1, que l'étude de la stabilité ne pouvait être abordée d'une manière générale qu'à l'aide d'équations rendant compte de déplacements suffisamment grands. Ceci doit nous guider dans le choix des expressions des déformations en fonction des déplacements.

Les équations que nous proposons dans les paragraphes suivants reposent sur les mêmes hypothèses que celles qui interviennent dans les équations de Von Karman pour les plaques :

- poutres suffisamment minces : $h/l \ll 1$
- déplacements transversaux finis mais modérés (de l'ordre de l'épaisseur h).

Nous considérons, dans tout ce qui suit, uniquement des barreaux ne pouvant fléchir (à la suite d'instabilité) que dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_3)$.

Soit u_1, u_2, u_3 les déplacements dans les directions respectivement parallèles à $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$. Notons que u_1 et u_2 sont d'un ordre de grandeur inférieur à celui de u_3. En effet u_3 ne peut devenir modérément grand que grâce au fait que la poutre soit mince, et que l'inertie de flexion dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_3)$ soit beaucoup plus faible que l'inertie de flexion dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ car $b > h$.

I.2.3. Tenseur des déformations.

Le tenseur complet des déformations de Green s'écrit :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta}\right] \quad , \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \qquad (6)$$

Comme les déplacements u_1 et u_2 sont beaucoup plus petits que les déplacements u_3, on ne garde, parmi les termes non linéaires, que ceux qui contiennent u_3. Le tenseur des déformations s'écrit alors:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i}\ \frac{\partial u_3}{\partial x_j}\right] \qquad (7a)$$

$$\varepsilon_{i3} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i}\right] \qquad (7b)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 \qquad (7c)$$

Les indices i et j variant de 1 à 2.

Lorsque la poutre fléchit, les déformations se distribuent de telle sorte que ε_{22} et ε_{33} sont très faibles. Il est donc classique dans la théorie des poutres, de poser :

$$\varepsilon_{33} \equiv 0 \qquad (7d)$$

Nous en déduisons :

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \equiv 0 \qquad (8)$$

D'où

$$u_3 = u_3\ (x_1,\ x_2,\ 0) \qquad (9)$$

Remarques :

1°) *Les déformations ainsi définies s'expriment par rapport aux coordonnées* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ *de la poutre non déformée.*

2°) *Contrairement à la théorie classique des poutres, nous ne négligeons pas les cisaillements transversaux* ε_{i3}.

I.2.4. Tenseur des contraintes.

Lorsque la poutre fléchit, on montre (31-32) que les contraintes σ_{11}, sont généralement plus grandes que les cisaillements σ_{12},

σ_{13} et σ_{23} qui eux-mêmes sont d'un ordre de grandeur supérieur aux contraintes σ_{22} et σ_{33}. Nous négligeons donc la contribution des composantes σ_{22} et σ_{33} du tenseur des contraintes :

$$\sigma_{22} \text{ et } \sigma_{33} \# 0 \qquad (10)$$

Les relations (7c) et (10) ne sont en fait qu'approchées, mais l'état réel des contraintes et des déformations est tel qu'elles sont pratiquement vérifiées.

σ_{ij} représente le tenseur des contraintes de Cauchy, exprimé dans les coordonnées (x'_1, x'_2, x'_3) après déformation. Il serait en fait intéressant d'exprimer l'état de contrainte par le tenseur des contraintes de Lagrange T_{ij} dans le repère des coordonnées initiales (x_1, x_2, x_3).

Or :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\gamma} T_{\gamma\beta} \; ; \; \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \qquad (11)$$

$$x'_i = x_i + u_i \qquad ; \qquad \rho \# \bar{\rho}$$

($\bar{\rho}$ et ρ : densité avant et après déformation).

Donc :

$$\sigma_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\gamma} T_{\gamma\beta} \qquad (12)$$

D'après l'ordre de grandeur des différentes composantes du tenseur des contraintes, et en faisant les mêmes approximations que celles qui nous ont conduit au tenseur des déformations (7a,b,c,d), il vient :

$$\sigma_{\alpha\beta} \# T_{\alpha\beta} \qquad (13)$$

Les composantes du tenseur des contraintes de Lagrange sont pratiquement égales à celles du tenseur de Cauchy. Nous pouvons donc rendre compte de l'état de contrainte et de déformation de la poutre en référant ces grandeurs aux coordonnées initiales.

Remarque :

Les contraintes σ_{12} sont parfois, dans le cas des poutres composites, du même ordre de grandeur que celui de σ_{11}, car il peut exister, du fait de l'anisotropie de la loi de comportement, un couplage entre les tractions σ_{11} et les cisaillements σ_{12}. Mais tout ce que nous avons dit ci-dessus reste encore valable.

I.2.5. Loi de comportement locale.

Bien que certains déplacements puissent être assez grands (u_3), les déformations restent localement très petites. Nous pouvons donc prendre la loi de comportement élastique linéaire et anisotrope dans la couche n° k de la forme :

$$\sigma_{\alpha\beta} = C^{(k)}_{\alpha\beta\gamma\delta}\ \varepsilon_{\gamma\delta} \qquad (14)$$

$C^{(k)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ = tenseur à symétrie orthotrope de rigidité du matériau de la couche n° k.

La constitution de nos échantillons est telle qu'il existe un plan de symétrie élastique parallèle au plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

L'expression la plus générale de la loi de comportement (14) s'écrit alors explicitement, dans le repère $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= C^{(k)}_{1111}\ \varepsilon_{11} + C^{(k)}_{1122}\ \varepsilon_{22} + C^{(k)}_{1133}\ \varepsilon_{33} + 2\ C^{(k)}_{1112}\ \varepsilon_{12} \\
\sigma_{22} &= C^{(k)}_{2211}\ \varepsilon_{11} + C^{(k)}_{2222}\ \varepsilon_{22} + C^{(k)}_{2233}\ \varepsilon_{33} + 2\ C^{(k)}_{2212}\ \varepsilon_{12} \\
\sigma_{33} &= C^{(k)}_{3311}\ \varepsilon_{11} + C^{(k)}_{3322}\ \varepsilon_{22} + C^{(k)}_{3333}\ \varepsilon_{33} \\
\sigma_{23} &= 2\ C^{(k)}_{2323}\ \varepsilon_{23} \qquad (15) \\
\sigma_{13} &= 2\ C^{(k)}_{1313}\ \varepsilon_{13} \\
\sigma_{12} &= C^{(k)}_{1211}\ \varepsilon_{11} + C^{(k)}_{1222}\ \varepsilon_{22} + 2\ C^{(k)}_{1212}\ \varepsilon_{12}
\end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, nous emploierons toujours dans la suite la notation matricielle :

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = \sigma_{11} \quad ; \quad \sigma_2 = \sigma_{22} \quad ; \quad \sigma_3 = \sigma_{33} \\
&\sigma_4 = \sigma_{23} \quad ; \quad \sigma_5 = \sigma_{13} \quad ; \quad \sigma_6 = \sigma_{12} \\
&\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \quad ; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \quad ; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \\
&\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23} \quad ; \quad \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13} \quad ; \quad \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}
\end{aligned} \qquad (16)$$

Compte tenu de la nullité des contraintes σ_{22} et σ_{33} :

$$\sigma_1 = R_{11}^{(k)} \varepsilon_1 + R_{16}^{(k)} \varepsilon_6 \qquad (17a)$$

$$\sigma_6 = R_{16}^{(k)} \varepsilon_1 + R_{66}^{(k)} \varepsilon_6 \qquad (17b)$$

$$\sigma_4 = R_{44}^{(k)} \varepsilon_4 \qquad (17c)$$

$$\sigma_5 = R_{55}^{(k)} \varepsilon_5 \qquad (17d)$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \qquad (17e)$$

Nous donnons dans l'annexe A.1 les expressions des rigidités $R_{ij}^{(k)}$ en fonction de $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)}$ et des coefficients d'élasticité traditionnels (modules d'Young et de cisaillement, coefficients de Poisson).

I.2.6. Champ de déplacement.

Compte tenu de ce qui a été dit au paragraphe I.2.3 sur la nature des déformations, nous sommes amenés à choisir le champ de déplacement suivant, pour tout point (x_1, x_2, x_3) :

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_1^\circ (x_1) + x_2 \alpha (x_1) + x_3 \beta (x_1) \\
u_2 &= u_2^\circ (x_1) + x_3 \gamma (x_1) \\
u_3 &= u_3^\circ (x_1) - x_2 \gamma (x_1)
\end{aligned} \qquad (18)$$

u_1°, u_2°, u_3° sont respectivement les déplacements des points de la ligne géométrique moyenne ($x_2 = 0$, $x_3 = 0$) de la poutre respectivement parallèlement à $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$. α, β, γ sont des rotations, fonction de x_1 seulement, et représentées sur la Figure 7.

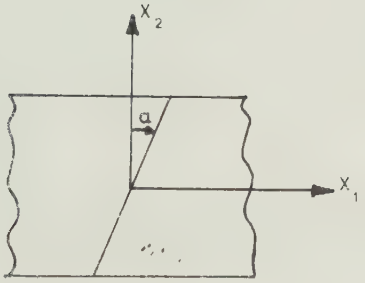

Figure 7a

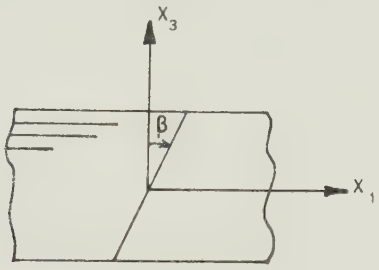

Figure 7b

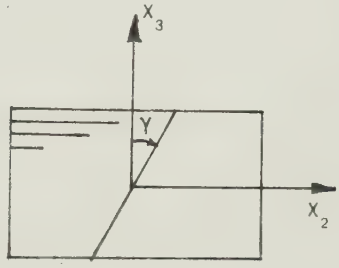

Figure 7c

Remarque :

Nous avons fait des hypothèses cinématiques (forme des déplacements donnée). En conséquence, il est probable que, localement, les équations d'équilibre des contraintes ne soient pas exactement vérifiées. Néanmoins, les efforts globaux et les déplacements globaux de la poutre réelle sont très voisins de ceux calculés à l'aide de la théorie proposée.

I.2.7. Compatibilité des déformations.

Compte tenu des relations (7a,b,c) et (18), les déformations sont :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^\circ + x_2\,\alpha_{,1} + x_3\,\beta_{,1} + \frac{1}{2}\,(x_2^2\,\gamma_{,1}^2 - 2\,x_2\,\gamma_{,1}\,u_{3,1}^\circ)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\,\gamma^2$$

$$\varepsilon_3 = 0 \qquad (19)$$

$$\varepsilon_4 = 0$$

$$\varepsilon_5 = \beta + u_{3,1}^\circ - x_2\,\gamma_{,1}$$

$$\varepsilon_6 = \alpha + u_{2,1}^\circ + x_3\,\gamma_{,1} - \gamma(u_{3,1}^\circ - x_2\,\gamma_{,1})$$

avec $\varepsilon_1^\circ = u_{1,1}^\circ + \frac{1}{2}\,(u_{3,1}^\circ)^2$

Nous nous sommes donnés la forme du champ de déplacement, donc les équations de compatibilité des déformations sont identiquement vérifiées par les expressions (19).

En fait, dans la suite, nous n'examinerons pas le flambage en torsion (rendu par la rotation γ). La rotation $\gamma(x_1)$ sera toujours faible et le seul déplacement "grand" sera $u_3^\circ(x_1)$ qui rend compte de la flexion de la poutre. Nous sommes donc amenés à négliger les termes en γ dans la partie non linéaire des déformations. Nous avons alors :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^\circ + x_2\,\alpha_{,1} + x_3\,\beta_{,1} \qquad (a)$$

$$\varepsilon_2 = 0 \qquad (b)$$

$$\varepsilon_3 = 0 \qquad (c) \qquad (20)$$

$$\varepsilon_4 = 0 \qquad (d)$$

$$\varepsilon_5 = \beta + u_{3,1}^\circ - x_2\,\gamma_{,1} \qquad (e)$$

$$\varepsilon_6 = \alpha + u_{2,1}^\circ + x_3\,\gamma_{,1} \qquad (f)$$

avec $\varepsilon_1^\circ = u_{1,1}^\circ + \frac{1}{2}\,(u_{3,1}^\circ)^2$.

La sixième équation de compatibilité :

$$\varepsilon_{1,22} + \varepsilon_{2,11} - \varepsilon_{6,12} = (u^{\circ}_{3,12})^2 - u^{\circ}_{3,11}\, u^{\circ}_{3,22} \qquad (21)$$

n'est plus vérifiée qu'à un terme en $\gamma^2_{,1}$, qui a déjà été négligé pour obtenir les équations (20). Les équations de compatibilité des déformations sont donc vérifiées à un infiniment petit près.

I.3. LOI DE COMPORTEMENT GLOBALE DE LA POUTRE.

Nous allons réduire les efforts internes qui existent au sein de la poutre en un torseur (Figure 8) obtenu par l'intégration des contraintes sur une section de la poutre.

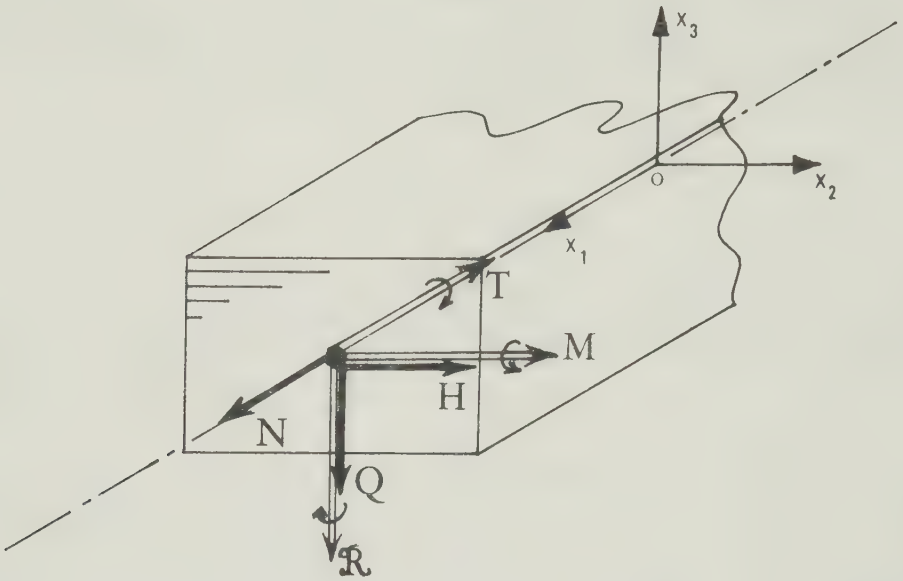

Figure 8

Le torseur de réduction se décompose sur les trois axes $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ en trois forces :

$\vec{N}$ = traction normale
$\vec{H}$ = cisaillement dans le plan de la poutre
$\vec{Q}$ = cisaillement transversal,

et en trois moments :

$\vec{M}$ = moment de flexion dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_3)$
$\vec{\mathfrak{R}}$ = moment de flexion dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$
$\vec{T}$ = moment de torsion.

Exprimons ces six grandeurs en fonction des contraintes qui agissent sur la face x_1 = Cte.

$$N = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 \, dx_2 \, dx_3 \qquad (22)$$

$$H = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_6 \, dx_2 \, dx_3 \qquad (23)$$

$$Q = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_5 \, dx_2 \, dx_3 \qquad (24)$$

$$M = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} x_3 \, \sigma_1 \, dx_2 \, dx_3 \qquad (25)$$

$$\mathcal{R} = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} x_2 \, \sigma_1 \, dx_2 \, dx_3 \qquad (26)$$

$$T = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} (x_3 \, \sigma_6 - x_2 \, \sigma_5) \, dx_2 \, dx_3 \qquad (27)$$

Posons :

$$A_{ij} = b \int_{-h/2}^{+h/2} R_{ij}(x_3) dx_3 = b \sum_{k=1}^{n} R_{ij}^{(k)} \, (h_k - h_{k-1}) \qquad (28)$$

$$A_{55} = b \int_{-h/2}^{+h/2} R_{55}(x_3)dx_3 = b \sum_{k=1}^{n} R_{55}^{(k)} (h_k - h_{k-1}) \qquad (29)$$

$$B_{ij} = b \int_{-h/2}^{+h/2} x_3 R_{ij}^{(k)} \, dx_3 = \frac{b}{2} \sum_{k=1}^{n} R_{ij}^{(k)} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \qquad (30)$$

$$D_{ij} = b \int_{-h/2}^{+h/2} x_3^2 \, R_{ij}^{(k)} \, dx_3 = \frac{b}{3} \sum_{k=1}^{n} R_{ij}^{(k)} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \qquad (31)$$

$(i, j) = (1, 2, 6)$.

En intégrant les relations (22 à 27) et en tenant compte des relations (28 à 31), il vient :

$$\begin{bmatrix} N \\ H \\ M \\ T \\ Q \\ \mathcal{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{16} & B_{11} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{66} & B_{16} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{16} & D_{11} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{66} & D_{16} & D_{66} + \frac{b^2}{12} A_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b^2}{12} A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^\circ \\ \alpha + u_{2,1}^\circ \\ \beta_{,1} \\ \gamma_{,1} \\ \beta + u_{3,1}^\circ \\ \alpha_{,1} \end{bmatrix} \qquad (32)$$

Les relations (32), que nous avons écrites sous forme matricielle, représentent la loi de comportement globale de la poutre. Toutes les grandeurs qui interviennent dans ces relations (aussi bien les efforts que les déplacements et les déformations) ne dépendent plus

que de la variable x_1. Nous avons donc réduit le milieu tridimensionnel à une ligne élastique munie de la loi de comportement donnée par la relation (32).

Cette loi met en évidence des couplages entre les différents modes de déformation de la poutre et représentés par les termes non diagonaux de la matrice de rigidité (A_{16}, B_{11}, B_{16}, B_{66} et D_{16}). Ces cinq rigidités de couplage sont dues à l'anisotropie et à l'hétérogénéité du matériau, et s'annulent dans le cas d'une poutre homogène et isotrope.

I.4. ENERGIE POTENTIELLE TOTALE DE LA POUTRE DEFORMEE.

L'énergie de déformation s'écrit d'une manière générale

$$V = \frac{1}{2} \iiint \sigma_{\alpha\beta} \; \varepsilon_{\alpha\beta} \; dx_1 \; dx_2 \; dx_3 \quad ; \quad (\alpha,\beta = 1, 2, 3) \qquad (33)$$

l'intégration se faisant sur tout le volume de la poutre.

Ici, compte tenu des équations de comportement (17), on a

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_5 \varepsilon_5 + \sigma_6 \varepsilon_6) dx_1 dx_2 dx_3 \qquad (34)$$

L'énergie potentielle des forces extérieures est :

$$\begin{aligned} U = & -\overline{N}(L)\,\overline{u}_1^{\circ}(L) + \overline{N}(0)\,\overline{u}_1^{\circ}(0) - \overline{H}(L)\,\overline{u}_2^{\circ}(L) + \overline{H}(0)\,\overline{u}_2^{\circ}(0) \\ & -\overline{M}(L)\,\overline{\beta}(L) + \overline{M}(0)\,\overline{\beta}(0) - \overline{T}(L)\,\overline{\gamma}(L) + \overline{T}(0)\,\overline{\gamma}(0) \\ & -\overline{Q}(L)\,\overline{u}_3^{\circ}(L) + \overline{Q}(0)\,\overline{u}_3^{\circ}(0) - \mathfrak{R}(L)\,\overline{\alpha}(L) + \mathfrak{L}(0)\,\overline{\alpha}(0) \end{aligned} \qquad (35)$$

Dans la relation (35) la notation (par exemple $\overline{M}(L)\,\overline{\beta}(L)$)veut dire que si M est donné en $x_1 = L$, β est inconnu. Par contre, si β est donné ($\beta = \overline{\beta}$), M est inconnu. Pour des réactions sur appuis rigides, nous avons par exemple $\beta = \overline{\beta} = 0$ (encastrement), et nous retrouvons bien qu'une réaction, sur un appui rigide, ne travaille pas.

Notons que la relation (35) exprime l'énergie potentielle des forces extérieures appliquées aux deux extrêmités, et ne considère pas de distributions de forces réparties sur la poutre.

I.5. EQUATIONS D'EQUILIBRE ET CONDITIONS AUX LIMITES.

I.5.1. Energie potentielle totale.

C'est, par définition :

$$\mathcal{E} = V + U \qquad (36)$$

I.5.2. Principe variationnel.

Pour toutes les positions d'équilibre, l'énergie potentielle totale des champs de déplacements cinématiquement admissibles est extrêmale. Nous pouvons donc écrire que sa variation première autour de la position d'équilibre, dans une variation cinématiquement admissible de champ de déplacement, est nulle :

$$\delta\mathcal{E} = \delta V + \delta U = 0 \qquad (37)$$

Compte tenu de (34)

$$\delta V = \int_0^L \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_1\, \delta\varepsilon_1 + \sigma_5\, \delta\varepsilon_5 + \sigma_6\, \delta\varepsilon_6)\, dx_1 dx_2 dx_3 \qquad (38)$$

et, en vertu des relations (21)

$$\delta V = \int_0^L \Big[N\, \delta\varepsilon_1^\circ + M\, \delta\beta_{,1} + H\,(\delta\alpha + \delta u_{2,1}^\circ) + T\delta\gamma_{,1} + Q(\delta\beta + \delta u_{3,1}^\circ) + \mathcal{R}\,\delta\alpha_{,1} \Big]\, dx_1 \qquad (39)$$

Les variations δu_1°, δu_2°, δu_3°, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ étant cinématiquement admissibles (vérifiant les conditions aux limites géométriques).

A l'aide de la formule de Green, il vient

$$\delta V = -\int_0^L \Big[N_{,1}\ \delta u_1^\circ + (N_{,1}\ u_{3,1}^\circ + N\ u_{3,11}^\circ)\ \delta u_3$$

$$+ M_{,1}\ \delta\beta - H\ \delta\alpha + \mathcal{H}_{,1}\ \delta u_2^\circ + T_{,1}\ \delta\gamma$$

$$- Q\ \delta\beta + Q_{,1}\ \delta u_3^\circ + \mathcal{R}_{,1}\ \delta\alpha \Big] dx_1 \qquad (40)$$

$$+ (N\ \delta u_1^\circ + N\ u_{3,1}^\circ\ \delta u_3^\circ + M\ \delta\beta + H\ \delta u_2^\circ + T\ \delta\gamma + Q\ \delta u_3^\circ + \mathcal{R}\delta\alpha)\Big|_{x_1=L}$$

$$-(N\ \delta u_1^\circ + N\ u_{3,1}\ \delta u_3^\circ + M\ \delta\beta + H\ \delta u_2^\circ + T\ \delta\gamma + Q\ \delta u_3^\circ + \mathcal{R}\delta\alpha)\Big|_{x_1=0}$$

La relation (35) nous donne :

$$\delta U = -\overline{N}(L)\ \delta\overline{u}_1^\circ(L) + \overline{N}(0)\ \delta\overline{u}_1^\circ(0) - \overline{H}(L)\ \delta\overline{u}_2^\circ(L) + \overline{H}(0)\ \delta\overline{u}_2^\circ(0)$$

$$- \overline{M}(L)\ \delta\overline{\beta}(L) + \overline{M}(0)\ \delta\overline{\beta}(0) - \overline{T}(L)\ \delta\overline{\gamma}(L) + \overline{T}(0)\ \delta\overline{\gamma}(0) \qquad (41)$$

$$- \overline{Q}(L)\ \delta\overline{u}_3^\circ(L) + \overline{Q}(0)\ \delta\overline{u}_3^\circ(0) - \overline{\mathcal{R}}(L)\ \delta\overline{\alpha}(L) + \overline{\mathcal{R}}(0)\ \delta\overline{\alpha}(0)$$

I.5.3. Equations d'équilibre.

Elles sont obtenues en annulant l'intégrale qui apparaît dans $\mathcal{E}$. Cette intégrale doit être nulle pour toute variation admissible du champ de déplacement, donc son intégrande est nul, en tout point x_1 compris entre 0 et L :

$$N_{,1} = 0 \qquad (a)$$

$$H_{,1} = 0 \qquad (b)$$

$$N_{,1}\ u_{3,1}^\circ + N\ u_{3,11}^\circ + Q_{,1} = 0 \qquad (c) \qquad (42)$$

$$-H + \mathcal{R}_{,1} = 0 \qquad (d)$$

$$M_{,1} - Q = 0 \qquad (e)$$

$$T_{,1} = 0 \qquad (f)$$

Les relations (42) sont les équations d'équilibre de la poutre.

I.5.4. Conditions aux limites.

Elles sont obtenues en annulant les termes de $\delta\mathcal{E}$ calculés en $x_1 = 0$ et en $x_1 = L$.

En $x_1 = L$:

$$\left[N(L) - \bar{N}(L)\right] \delta u_1^\circ(L) = 0 \qquad (a)$$

$$\left[H(L) - \bar{H}(L)\right] \delta u_2^\circ(L) = 0 \qquad (b)$$

$$\left[M(L) - \bar{M}(L)\right] \delta\beta(L) = 0 \qquad (c) \quad (43)$$

$$\left[T(L) - \bar{T}(L)\right] \delta\gamma(L) = 0 \qquad (d)$$

$$\left[Q(L) + N\, u_{3,1}^\circ(L) - \bar{Q}(L)\right] \delta u_3^\circ(L) = 0 \qquad (e)$$

$$\left[\mathcal{R}(L) - \bar{\mathcal{R}}(L)\right] \delta\alpha(L) = 0 \qquad (f)$$

On obtient des relations analogues pour $x_1 = 0$. On a donc comme conditions aux limites pour $x_1 = L$:

$$N(L) = \bar{N}(L) \quad \text{ou} \quad u_1^\circ(L) = \bar{u}_1^\circ(L) \qquad (a)$$

$$H(L) = \bar{H}(L) \quad \text{ou} \quad u_2^\circ(L) = \bar{u}_2^\circ(L) \qquad (b)$$

$$M(L) = \bar{M}(L) \quad \text{ou} \quad \beta(L) = \bar{\beta}(L) \qquad (c) \quad (44)$$

$$T(L) = \bar{T}(L) \quad \text{ou} \quad \gamma(L) = \bar{\gamma}(L) \qquad (d)$$

$$Q(L) + N(L)\, u_{3,1}^\circ = \bar{Q}(L) \quad \text{ou} \quad u_3^\circ(L) = \bar{u}_3^\circ(L) \qquad (e)$$

$$\mathcal{R}(L) = \bar{\mathcal{R}}(L) \quad \text{ou} \quad \alpha(L) = \bar{\alpha}(L)$$

Remarquons que $\bar{Q}(L)$ n'est pas le cisaillement transversal appliqué à la poutre en $x_1 = L$, mais la composante suivant $\vec{x}_3$ de la force transversale appliquée en ce point.

I.6. CONCLUSIONS.

La théorie des poutres stratifiées nous a permis de poser les équations d'équilibre d'une poutre composite, en tenant compte :

- du cisaillement transversal ε_5 qui est en général négligé,
- de l'anisotropie et de l'hétérogénéité du matériau,
- du fait que le déplacement u_3° peut prendre des valeurs "assez grandes".

x
x x
x

CHAPITRE II

STABILITE D'UNE POUTRE STRATIFIEE CHARGEE AXIALEMENT PAR UNE FORCE CONSTANTE

A l'aide des équations posées dans le chapitre I, nous allons étudier le comportement d'une poutre composite chargée axialement par une force constante de compression d'intensité λ *(*$\lambda \geq 0$*).*

Conformément à la présentation que nous avons faite précédemment (§ I.1.) du phénomène de stabilité élastique, nous allons rechercher les valeurs de λ *finies pour lesquelles des déplacements transversaux* u_3° *deviennent très grands, infinis, ou indéterminés. C'est la méthode de l'équilibre (Cf Ziegler, ref. 33).*

II.1. TYPES DES POUTRES ETUDIEES.

Au lieu de traiter le cas le plus général (tous les A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} non nuls), nous allons développer les calculs pour six types de poutres correspondant aux renforcements les plus utilisés en pratique.

II.1.1. Type 1.

A_{11}, A_{16}, A_{66}, A_{55}, D_{11}, D_{16}, D_{66} non nuls.

$B_{11} = B_{16} = B_{66} = 0$

Ce type correspond par exemple à un renforcement unidirectionnel de fibres décalées d'un angle θ par rapport à l'axe de la poutre (Fig. 9).

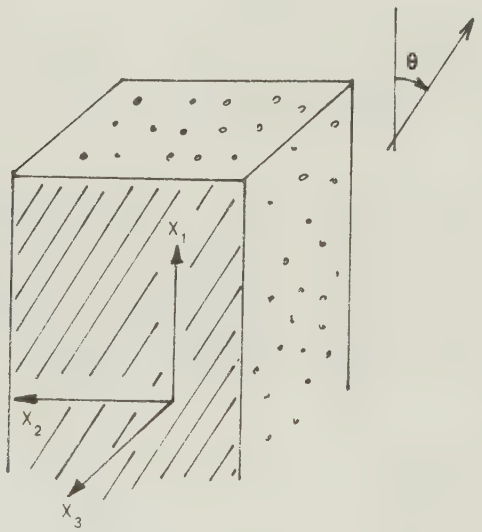

Figure 9.

Poutre de type 1

II.1.2. Type 2.

Même chose que le type 1 mais avec $A_{16} = 0$.

II.1.3. Type 3.

Même chose que le type 1 mais avec $D_{16} = 0$.

Les types 2 et 3 correspondent par exemple à des renforcements de fibres décalées de $\pm \theta$ par rapport à l'axe x_1, les couches étant symétriques suivant l'épaisseur et ayant des épaisseurs telles que $A_{16} = 0$, ou $D_{16} = 0$ (Fig. 10).

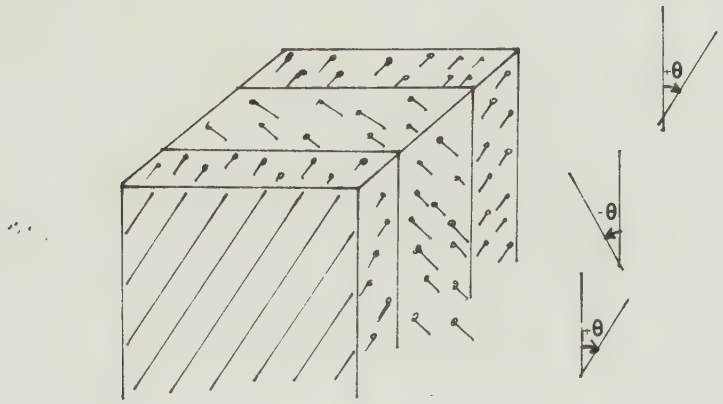

Figure 10

Poutre de types 2 et 3

II.1.4. Type 4.

A_{11}, A_{55}, A_{66}, D_{11}, D_{66} non nuls.

$B_{11} = B_{16} = B_{66} = A_{16} = D_{16} = 0$.

Le type 4 correspond par exemple à des renforcements unidirectionnels ou bidirectionnels symétriques ayant leurs axes principaux parallèles à ceux de la poutre (Fig. 11).

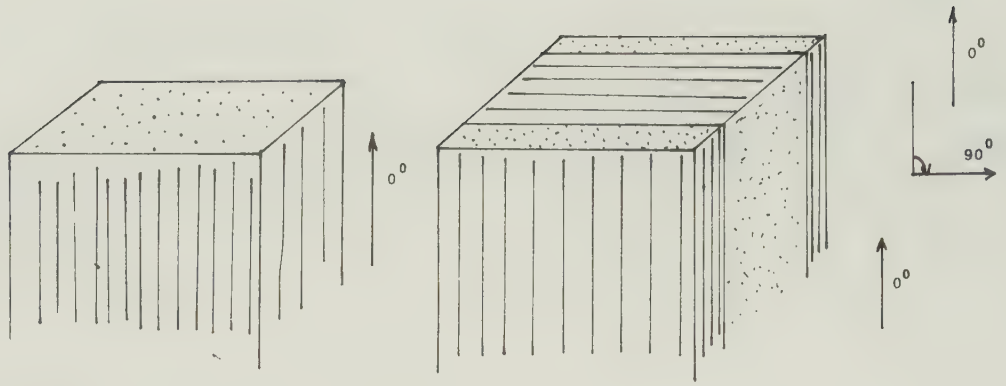

Figure 11

Poutres de type 4

II.1.5. Type 5.

A_{11}, A_{55}, A_{66}, B_{16}, D_{11}, D_{66} non nuls.

$A_{16} = B_{11} = B_{66} = D_{16} = 0$.

Le type 5 correspond par exemple à des renforcements bidirectionnels de fibres décalées de $\pm\,\theta$ par rapport à l'axe de la poutre, l'arrangement étant non symétrique suivant l'épaisseur (Fig. 12).

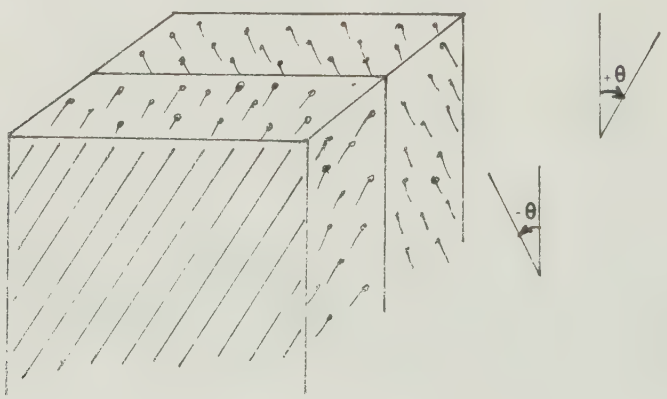

Figure 12

Poutre de type 5

II.1.6. Type 6.

A_{11}, A_{55}, A_{66}, B_{11}, D_{11}, D_{66} non nuls.

$A_{16} = B_{16} = B_{66} = D_{16} = 0$.

Le type 6 correspond par exemple à des renforcements bidirectionnels de fibres parallèles aux axes de la poutre, l'arrangement des couches n'étant pas symétrique suivant l'épaisseur (Fig. 13).

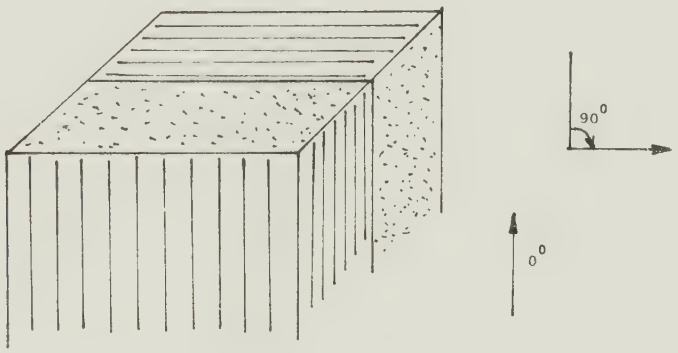

Figure 13

Poutre de type 6

II.2. CONDITIONS AUX LIMITES ETUDIEES.

Nous étudierons quatre cas de conditions aux limites.

II.2.1. Cas A.

Les deux extrêmités sont articulées sur rotule. Les trois rotations α, β, γ sont libres (Fig. 14).

Figure 14

Les conditions aux limites s'écrivent alors en $x_1 = 0$ et L :

$$N = -\lambda \quad (\lambda \geqslant 0) \qquad (a)$$

$$u_2^\circ = 0 \qquad (b)$$

$$u_3^\circ = 0 \qquad (c) \qquad (45)$$

$$\mathcal{R} = 0 \qquad (d)$$

$$M = 0 \qquad (e)$$

$$T = 0 \qquad (f)$$

II.2.2. Cas B.

Les deux extrêmités sont articulées librement sur deux arêtes parallèles à l'axe $\vec{x}_2$ (Fig. 15).

Figure 15

Les conditions aux limites s'écrivent, pour $x_1 = 0$ et L :

$$N = -\lambda \quad (\lambda \geqslant 0) \qquad (a)$$
$$u_2^\circ = 0 \qquad (b)$$
$$u_3^\circ = 0 \qquad (c) \qquad (46)$$
$$\alpha = 0 \qquad (d)$$
$$M = 0 \qquad (e)$$
$$\gamma = 0 \qquad (f)$$

II.2.3. Cas C.

En $x_1 = L$, articulation du type 2.

En $x_1 = 0$, encastrement rigide (les trois rotations sont bloquées) (Cf. Fig. 16).

En $x_1 = L$, les conditions aux limites sont données par les relations (46).

En $x_1 = 0$, nous avons donc :

$$N = -\lambda \qquad (a)$$

$$u_2^\circ = 0 \qquad (b)$$

$$u_3^\circ = 0 \qquad (c)$$

$$\alpha = 0 \qquad (d) \qquad (47)$$

$$\beta = 0 \qquad (e)$$

$$\gamma = 0 \qquad (f)$$

Figure 16

II.2.4. Cas D.

Les deux extrêmités sont rigidement encastrées (Fig. 17). Les conditions aux limites sont données par les relations (47), pour $x_1 = 0$ et $x_1 = L$.

Figure 17

II.3. EQUATIONS D'EQUILIBRE EN β et u_3°. SOLUTIONS GENERALES.

D'après les équations d'équilibre (42a,b,c) et la loi de comportement (32), nous pouvons écrire :

$$M_{,1} = D^* \beta_{,11} \qquad (48)$$

D^* est une constante qui ne dépend que des rigidités A_{ij}, B_{ij} et D_{ij}. D^* sera appelée rigidité réduite de flexion. Le tableau II.1 donne l'expression de D^* pour les six types de poutres étudiées.

Compte tenu des relations (32) et (42c,e), nous avons :

$$\begin{aligned} Q &= A_{55} (\beta + u_{3,1}^\circ) && (a) \\ Q &= M_{,1} && (b) \\ Q_{,1} &+ N u_{3,11}^\circ = 0 && (c) \\ M_{,1} &= D^* \beta_{,11} && (d) \end{aligned} \qquad (49)$$

D'où nous tirons les deux équations d'équilibre aux déplacements :

$$\begin{aligned} \beta_{,111} &+ \Omega^2 \beta_{,1} = 0 && (a) \\ u_{3,1}^\circ &= (D^*/A_{55}) \beta_{,11} - \beta && (b) \end{aligned} \qquad (50)$$

avec $$\Omega^2 = \frac{\lambda}{D^* (1 - \frac{\lambda}{A_{55}})}$$

La solution générale de (50a) est (Ω^2 est toujours positif dans la pratique car $\lambda \ll A_{55}$) :

$$\beta (x_1) = C_1 \cos \Omega x_1 + C_2 \sin \Omega x_1 + C_3 \qquad (51)$$

et en intégrant (50b) :

$$u_3^\circ(x_1) = \frac{- C_1}{(1 - \frac{\lambda}{A_{55}})} \sin \Omega x_1 + \frac{C_2}{(1 - \frac{\lambda}{A_{55}})} \cos \Omega x_1 - C_3 x_1 + C_4 \; ; \qquad (52)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 sont des constantes déterminées par certaines des conditions aux limites.

Type renforc.	Rigidité réduite D^*	CHARGE CRITIQUE λ_c			
		Cond. Lim. A	Cond. Lim. B	Cond. Lim. C	Cond. Lim. D
1	$D_{11}-\frac{D_{16}}{D_{66}+\frac{b^2}{12}A_{55}}$	$\frac{D^*\pi^2}{L^2}\ \frac{1}{1+\frac{D^*}{A_{55}}\frac{\pi^2}{L^2}}$	* * *	* * *	$\frac{4\pi^2 D^*}{L^2}\ \frac{1}{1+\frac{D^*}{A_{55}}\frac{4\pi^2}{L^2}}$
2	$D_{11}-\frac{D_{16}}{D_{66}+\frac{b^2}{12}A_{55}}$	id.	* * *	* * *	id.
3	D_{11}	id.	$\frac{D^*\pi^2}{L^2}\ \frac{1}{1+\frac{D^*}{A_{55}}\frac{\pi^2}{L^2}}$	$\frac{20{,}19D^*}{L^2}\ \frac{1}{1+\frac{20{,}19D^*}{L^2 A_{55}}}$	id.
4	D_{11}	id.	id.	id.	id.
5	$D_{11}-\frac{B_{16}^2}{A_{66}}$	id.	* * *	* * *	id.
6	$D_{11}-\frac{B_{11}^2}{A_{11}}$	id.	$\frac{D^*\pi^2}{L^2}\ \frac{1}{1+\frac{D^*}{A_{55}}\frac{\pi^2}{L^2}}$	$\frac{20{,}19D^*}{L^2}\ \frac{1}{1+\frac{20{,}19D^*}{L^2 A_{55}}}$	id.

* * * Programme de calcul donné dans l'Annexe A.II.

TABLEAU II.1

II.4. SCHEMA DE LA METHODE DE CALCUL DES CHARGES CRITIQUES.

Nous nous bornerons, afin d'alléger l'exposé, à donner le schéma de la méthode de calcul des charges critiques. Le détail des calculs, qui ne présentent aucune difficulté, peut être consulté dans la référence (34, partie I).

En exprimant les conditions aux limites, nous trouvons deux types de solutions :

a) Premier type de solutions.

Les fonctions $u_3^\circ(x_1)$ et $\beta(x_1)$ sont indentiquement nulles, sauf pour une suite de valeurs discrètes de λ, pour lesquelles $u_3^\circ(x_1)$ et $\beta(x_1)$ sont indéterminées. La plus petite de ces valeurs pour lesquelles il peut y avoir instabilité est la charge critique λ_c. Nous reconnaissons le phénomène de flambage au sens classique du terme. λ_c est alors la plus petite des racines positives d'une équation transcendante en λ, que l'on ne peut pas résoudre explicitement dans tous les cas.

b) Deuxième type de solutions.

Les fonctions $u_3^\circ(x_1)$ et $\beta(x_1)$ sont non nulles pour toute valeur de λ strictement positive. En d'autres termes, la poutre fléchit dès le début du chargement. Pour certaines valeurs discrètes de λ, u_3° et β deviennent infinis. Pour toute autre valeur de λ, ces fonctions sont finies et déterminées.

Ici encore, on rencontre une charge critique au sens général du terme (Cf Ziegler, ref. 33), mais pas au sens du flambage classique des poutres. Nous pouvons alors définir la plus petite des valeurs discrètes de λ pour lesquelles la flexion devient infinie, comme étant la charge critique λ_c.

II.5. RESULTATS.

Le tableau II.1 p. résume l'ensemble des résultats. Ceux-ci se classent en trois catégories.

a) Première catégorie.

La charge critique est donnée par la formule :

$$\lambda_c = \mu \frac{D^*}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\mu}{L^2} \frac{D^*}{A_{55}}} \qquad (53)$$

La constante μ dépend des conditions aux limites :

Condition limite A : $\mu = \pi^2$
" " B : $\mu = \pi^2$
" " C : $\mu = 20,19$
" " D : $\mu = 4\,\pi^2$

Le terme $\frac{\mu}{L^2} \frac{D^*}{A_{55}}$ correspond à la correction de cisaillement transversal.

La formule (53) est analogue à celle utilisée en résistance des matériaux, en prenant pour rigidité de flexion de la poutre la rigidité réduite D^*. Dans ce cas, nous avons :

$$M = D^* \beta_{,1} \qquad (54)$$

b) Deuxième catégorie, (poutre des types 1, 2 et 5)

λ_c est la plus petite des racines des équations :

$$\sin \Omega L + \frac{2\eta}{D^* L} (1 - \cos \Omega L) = 0 \qquad (55)$$

pour les conditions aux limites B,

$$\sin \Omega L - (1 - \frac{\lambda}{A_{55}}) \Omega L \sin \Omega L + \frac{\eta}{D^* \ L} [2(1-\cos \Omega L) - \Omega L (1 - \frac{\lambda}{A_{55}}) \sin \Omega L] = 0$$

(eq. 56)

pour les conditions aux limites C.

La constante η dépend du type de poutre :

* poutre des types 1 et 2 :

$$\eta = \frac{D_{16}^2}{(D_{66} + \frac{b^2}{12} A_{55})} \qquad (57)$$

* poutre du type 5 :

$$\eta = \frac{B_{16}^2 \ A_{11}}{A_{66}^2 \ (\frac{L^2}{b^2} + \frac{A_{11}}{A_{66}})} \qquad (58)$$

Dans chaque cas particulier, nous calculons λ_c à l'aide d'un programme de calcul numérique sur ordinateur, basé sur la méthode itérative de Newton (Cf Annexe A.II).

Remarquons que la valeur de λ_c, solution des équations (55) ou(56), est supérieure à celle qui serait obtenue à l'aide de la formule (53), négligeant l'influence de la nature des appuis (couteaux).

Notons enfin que le moment fléchissant n'est plus proportionnel à la courbure $\beta_{,1}$. Nous avons en effet (cond. lim. B et C) :

$$M = D^* \beta_{,1} + \eta \frac{\beta(L) - \beta(0)}{L} \qquad (59)$$

(pour les conditions aux limites C, on pose $\beta(0) = 0$).

c) Troisième catégorie :

Elle concerne les poutres de type 6, avec au moins un appui (C.L. types A, B et C).

* *Conditions aux limites A et B.*

Les équations (50) admettent comme solution unique :

$$u_3^\circ(x_1) = \frac{B_{11}}{A_{11}} \left[\operatorname{tg} \frac{\Omega L}{2} \sin \Omega x_1 + \cos \Omega x_1 - 1 \right] \qquad (60)$$

Cette solution devient infinie pour :

$$\frac{L}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{D^* \left(1 - \frac{\lambda}{A_{55}}\right)}} = \frac{\pi}{2} (2n - 1) \qquad (61)$$

ou

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 D^*}{L^2} (2n-1)^2 \frac{1}{1 + \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{L^2} \frac{D^*}{A_{55}}} \qquad (62)$$

Les variations de u_3° (L/2) en fonction de λ sont données Figure 18.

Ce type de poutre présente donc un comportement sous charge axiale nouveau par rapport aux poutres classiques. La flexion apparaît dès le début du chargement. Conformément à ce qui a été dit au paragraphe précédent, nous pouvons considérer que λ_1 est charge critique car c'est la plus petite charge pour laquelle apparaissent des déplacements latéraux $u_3^\circ(x_1)$ infinis. Nous avons alors :

$$\lambda_c = \frac{\pi^2 D^*}{L^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{L^2} \frac{D^*}{A_{55}}} \qquad (63)$$

Remarque :

L'expression (60) est exactement la même que celle donnant la flèche au centre d'une poutre chargée axialement avec une excentricité e aux deux extrêmités (Cf. Fig. 19), le rapport B_{11}/A_{11} étant remplacé par e. La distance e représente la distance entre le point d'application de la force et le centre d'inertie réduit de flexion (35) de la poutre.

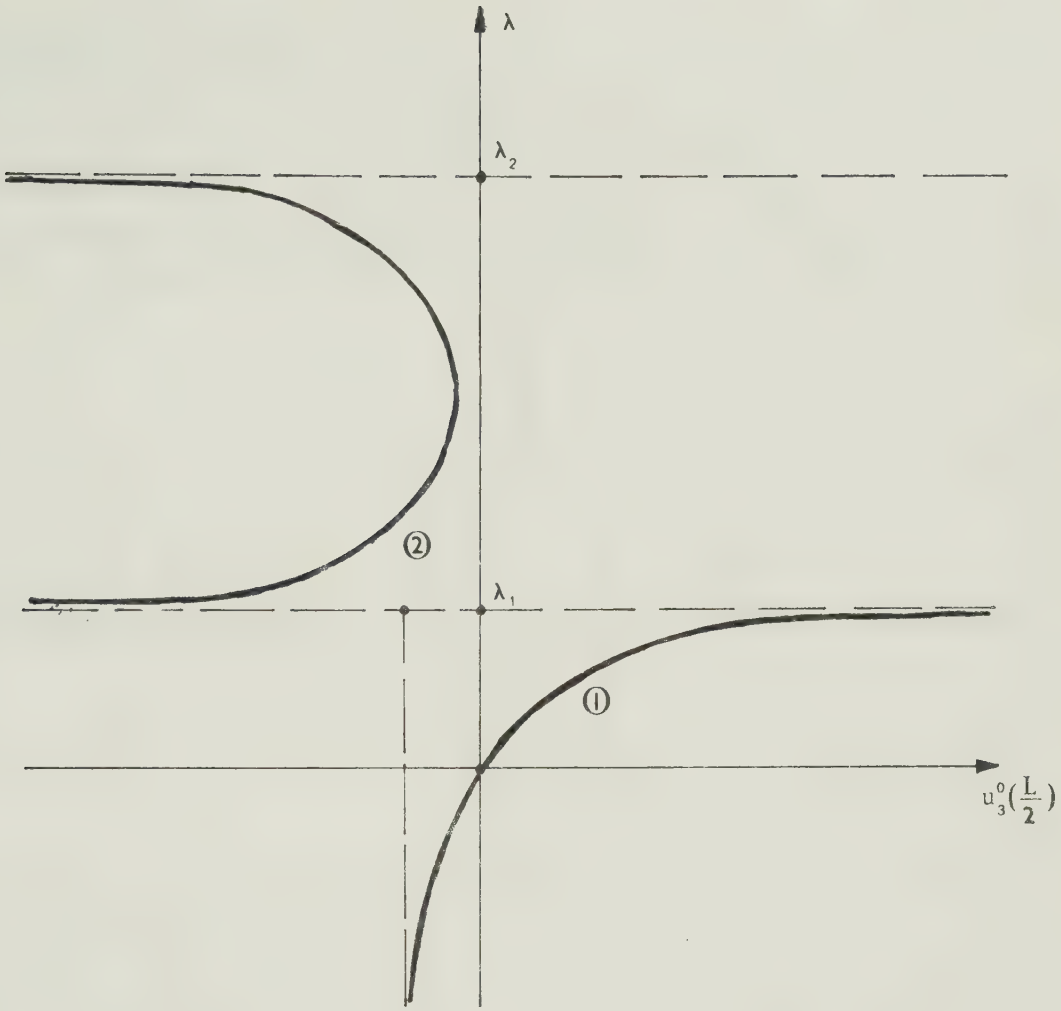

Figure 18

Figure 19

Remarquons d'autre part que le terme B_{11}/A_{11} représente aussi la distance du centre d'inertie de flexion de la poutre composite à sa ligne géométrique moyenne où est appliquée, par définition, la force λ. Nous pouvons donc facilement interpréter le résultat donné par la formule (60) en disant que la charge λ n'est pas appliquée sur le centre d'inertie réduit de flexion mais à une distance B_{11}/A_{11} qui correspond à une excentricité e (Cf. Fig. 20).

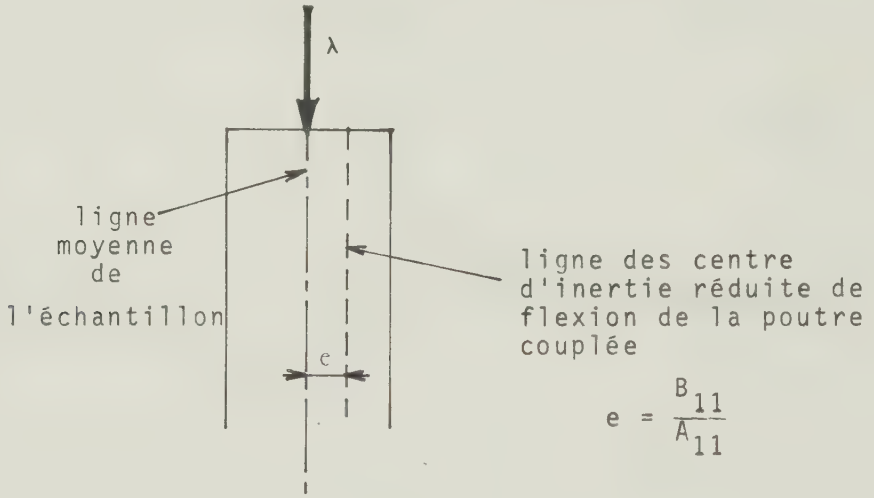

Figure 20

Lorsque le couplage disparaît ($B_{11} = 0$), la ligne des centres d'inertie de flexion est confondue avec la ligne moyenne de l'échantillon, et la poutre composite se comporte alors comme une poutre homogène. La charge λ_1 est égale à la charge critique λ_c de la poutre non couplée ($B_{11} = 0$). L'effet du couplage B_{11} est donc d'induire, avant flambage, une flexion, mais la charge critique (u_3^o infini) n'est altérée dans ce couplage que par la présence du terme B_{11}^2/A_{11} dans la rigidité réduite de flexion D^*.

Notons enfin la présence d'une autre branche d'équilibre (② sur la Figure 18), qui correspond à des charges supérieures à la charge critique λ_1, et dont nous avons d'ailleurs vérifié expérimentalement l'existence.

* *Conditions aux limites C.*

Les équations (50) admettent comme solution unique :

$$u_3^\circ(x_1) = \frac{B_{11}}{A_{11}} \left\{ \frac{1 - \cos \Omega L}{\Omega L \left(1 - \frac{\lambda}{A_{55}}\right) \cos \Omega L - \sin \Omega L} \left[\Omega x_1 \left(1 - \frac{\lambda}{A_{55}}\right) - \sin \Omega x_1\right] \right.$$

$$\left. + \frac{\Omega L \left(1 - \frac{\lambda}{A_{55}}\right) - \sin \Omega L}{\Omega L \left(1 - \frac{\lambda}{A_{55}}\right) \cos \Omega L - \sin \Omega L} (\cos \Omega x_1 - 1) \right\} \qquad (64)$$

La plus petite des valeurs pour lesquelles u_3° devient infini est :

$$\lambda_1 = 20{,}19 \frac{D^*}{L^2} \frac{1}{1 + \frac{20{,}19}{L^2} \frac{D^*}{A_{55}}} \qquad (65)$$

Conformément à ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent, λ_1 est la charge critique λ_c.

La relation (64) représente aussi la flexion d'une poutre encastrée-articulée et chargée axialement par une force excentrée de $e = B_{11}/A_{11}$ à l'articulation (Cf. Fig. 21).

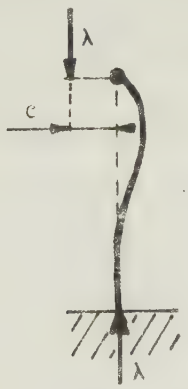

Figure 21

II.6. CONCLUSIONS DU CHAPITRE II.

La théorie exposée ci-dessus a permis de mettre en évidence les points suivants :

1°) *Calcul des charges critiques.*

Il est possible de calculer la valeur de la charge critique dans tous les cas de renforcement et de conditions auxlimites, soit en conduisant le calcul littéral jusqu'au bout, soit en résolvant numériquement une équation transcendante assez simple. Le calcul fait toujours intervenir la rigidité réduite D^* ne dépendant que de la nature du renforcement. Lorsque le calcul littéral complet de λ_c est possible, on peut aboutir aux formules de la résistance des matériaux classiques en prenant comme rigidité de flexion la rigidité réduite D^*.

2°) *Influence des termes de couplage A_{16}, D_{16}, B_{11}, B_{16}.*

Ils interviennent en règle générale dans la valeur de D^*, et réduisent la rigidité effective de l'échantillon ($D^* \leqslant D_{11}$).

De plus, ces termes de couplages sont responsables de l'apparition de nouveaux modes de déformation qui peuvent apparaître soit après flambage (α, γ, u_2°), soit avant flambage (u_3° et $\beta \neq 0$). Dans le premier cas, ce sont les rigidités A_{16}, D_{16} et B_{16} qui interviennent et mettent en évidence l'importance de l'anisotropie du matériau. Dans le second cas, c'est le terme B_{11} qui est responsable de la flexion avant flambage, et le comportement de la poutre composite est très différent de celui d'une poutre homogène : c'est l'effet d'hétérogénéité qui est alors primordial. Notons que la rigidité A_{16} n'a d'influence ni sur la valeur de λ_c, ni sur le comportement avant flambage.

3°) *Influence de la nature des appuis.*

Elle apparaît surtout sur des résultats obtenus pour les appuis type "rotule" et les appuis type "couteau", lorsque certains couplages existent (D_{16} et B_{16}). Le premier appui laisse toutes les

déformations libres alors que le second en bloque certaines (distorsion plane α et torsion γ). Il en résulte une rigidification de la poutre dans le second cas lorsqu'elle a tendance à se déformer suivant ces modes : ceci explique que nous trouvions alors des charges critiques un peu plus fortes et déterminées à l'aide d'une équation transcendante lorsqu'il y a au moins un appui du type "couteau".

Pour illustrer ceci, nous avons calculé numériquement les charges critiques λ_c de poutres du type 1, 2 et 5 constituées de deux matériaux composites courants :

- aluminium renforcé par des fibres de bore (moyennement anisotrope)
- résine epoxy renforcée par des fibres de bore (fortement anisotrope).

Nous avons choisit :

. élancement $L/h = 100$

. $1 \leqslant b/h \leqslant 15$

Nous avons étudié le paramètre E :

$$E = \frac{\lambda_c - \lambda_1}{\lambda_1} \quad \text{(en \%)}$$

avec

$$\lambda_1 = \mu \frac{D^*}{L^2} \; \frac{1}{1 + \frac{\mu}{L^2} \frac{D^*}{A_{55}}}$$

E rend compte de l'erreur que l'on fait en appliquant la formule (53) pour calculer λ_c dans ces cas particuliers.

L'étude complète (Cf. ref. 34, partie V) fait varier divers paramètres (b/h, angles entre les fibres et l'axe de la poutre, nombre de couches). Nous ne donnons ici que les valeurs maximales de E (Tableau II.2).

	Type de poutre	Aluminium-Bore	Résine-Bore
Condit. Lim. B	1 - 2	$E \leqslant 4{,}5\%$	$E \leqslant 90\ \%$
	5	$E \leqslant 0{,}4\%$	$E \leqslant 14\ \%$
Condit. Lim. C	1 - 2	$E \leqslant 1\ \%$	$E \leqslant 23\ \%$
	5	$E \leqslant 0{,}1\%$	$E \leqslant 2{,}7\%$

Tableau II.2 : Valeurs maximales du paramètre E.

Nous constatons que, si l' écart E, toujours positif, est assez faible pour les matériaux faiblement anisotropes (Al-B), il n'en est plus de même pour les composites très anisotropes (Résine-B). Il est donc important de bien préciser la nature des appuis pour calculer la charge critique.

4°) *Influence de cisaillement transversal*.

La théorie proposée permet de tenir compte du cisaillement transversal (C.T.). Les termes correctifs obtenus sont analogues à ceux de Timoshenko (36) et Marguerre (32), à un coefficient 1,2 près. Nous avons pris un champ de déplacement et, du fait des approximations utilisées, la répartition des contraintes n'est pas exacte. Mais ce point n'est pas très important, car le C.T. n'intervient que dans un terme correctif.

Ceci permet au moins de savoir s'il est négligeable ou pas. Nous pouvons donc voir que, si pour les poutres homogènes et isotropes, le C.T. est négligeable, il n'en est plus de même pour certaines poutres composites où le rapport de la rigidité de C.T. A_{55} à celle de flexion D^* peut être très faible ($A_{55}h^2/D^*$ de 1/50 à 1/100) et ceci, même pour des élancements assez grands. C'est le même phénomène qui apparaît dans les structures sandwiches.

5°) *Nature des équations régissant le problème.*

Nous sommes partis d'équations non linéaires (expression des déformations non linéaires en u_3°). Mais l'équation d'équilibre N = Cte simplifie le problème, car elle linéarise toutes les autres équations. Landau et Lifchitz (31) ont souligné ceci sur les tiges élastiques minces, homogènes, en remarquant que la flexion n'altère pas les contraintes axiales car il n'existe pas de couplage géométrique comme dans les plaques. Dans les barres composites, le couplage géométrique n'existe pas non plus et seuls subsistent les couplages dus à la loi de comportement. Comme celle-ci est linéaire, le système d'équations d'équilibre et de conditions aux limites est linéaire. Cette simplification ne peut malheureusement pas se faire dans le cas de plaques composites, où le couplage géométrique entre la flexion et la déformation de membrane complique considérablement le problème.

Nota :

1. *Nous n'avons pas envisagé dans cette étude le flambage en torsion de la poutre chargée axialement, phénomène qui pourrait présenter un intérêt pour les poutres de type 5.*

2. *Il arrive, dans la pratique, que les renforcements soient plus compliqués que les six types étudiés ici (apparition simultanée de plusieurs rigidités de couplage). Le problème se traite exactement de la même façon, et ne présente aucune difficulté nouvelle sur le plan théorique.*

x
x x
x

CHAPITRE III

MESURE DES CHARGES CRITIQUES :

ESSAI DE JUSTIFICATION THEORIQUE DE DEUX METHODES UTILISEES DANS LA PRATIQUE

La théorie que nous avons exposée dans le chapitre précédent rend compte des propriétés d'un modèle mathématique, mais non du comportement exact d'une poutre réelle. Celle-ci ne vérifie en général les hypothèses de la théorie que dans un certain domaine d'approximation que l'on se fixe au départ. Malheureusement, il existe certains phénomènes physiques où un écart, même petit, du système réel par rapport au système idéalisé dans la formulation mathématique, peut engendrer des transformations importantes de l'évolution du phénomène étudié. C'est en général le cas des problèmes de stabilité.

Les écarts du modèle théorique au système réel sont appelés imperfections.

Les imperfections peuvent être catastrophiques pour la stabilité de certaines structures : une coque cylindrique chargée axialement peut avoir sa charge critique de flambage divisée par 2 ou 3 pour des courbures initiales très faibles. Pour les poutres, le phénomène a été étudié depuis longtemps. Le comportement de la poutre parfaite (sans imperfections) est donné Figure 22a : la courbe ① représente le diagramme d'équilibre exact (équation non linéaire complète) et la courbe ② le diagramme d'équilibre approché

(équation linéarisée). En fait, pour les poutres classiques, ces deux courbes sont très proches l'une de l'autre (effets non linéaires très faibles), et on peut les confondre. Pour $\lambda \leqslant \lambda_c$, *la solution triviale (poutre droite) existe seule. Pour* $\lambda > \lambda_c$, *il existe en plus de la position droite d'équilibre, une position d'équilibre fléchie, qui est la seule stable. Donc pour une charge* λ *très légèrement supérieure à* λ_c, *la flexion de la poutre peut être très importante. Dans ce modèle, la notion de la stabilité apparaît sans ambiguité.*

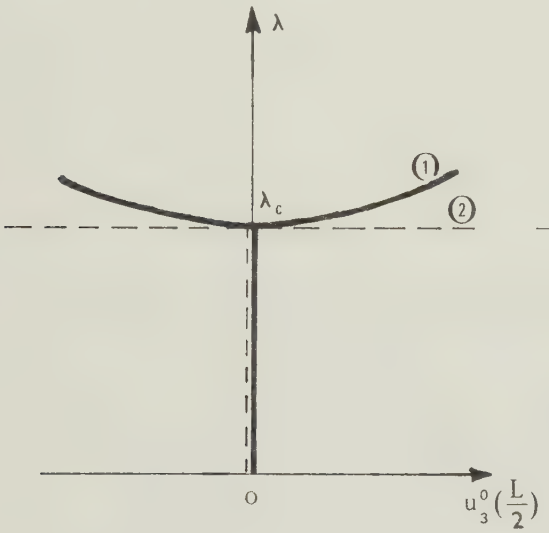

Figure 22a

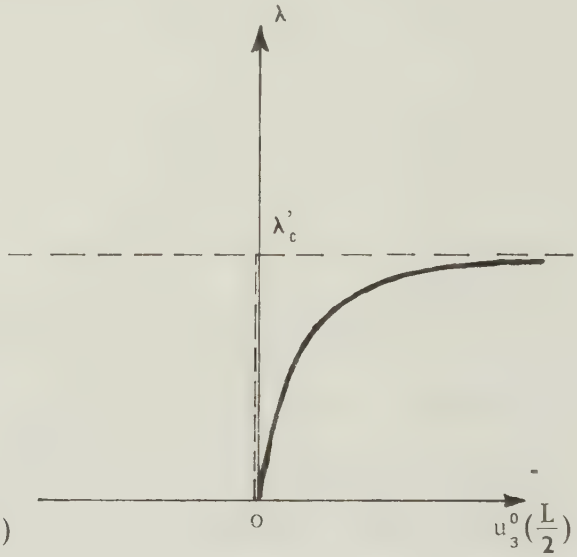

Figure 22b

Le comportement de la poutre réelle, donc imparfaite (munie d'imperfections) est représenté Figure 22b (trait plein), où nous avons dilaté les abscisses par rapport à la Figure 22a. La poutre, dès le début du chargement, commence à fléchir, lentement d'abord, puis de plus en plus rapidement, jusqu'à des valeurs très grandes au voisinage de λ_c. *Le diagramme d'équilibre admet une asymptote horizontale* $\lambda = \lambda'_c$.

On peut se demander l'intérêt de l'étude du système parfait, puisque le système réel (toujours muni d'imperfections) a un comportement assez différent. En fait la valeur λ'_c *apparaît comme une*

borne supérieure du chargement du système réel, et donc comme une valeur caractéristique de la poutre réelle chargée axialement.

Lorsque l'on prend en compte dans le modèle théorique les imperfections, on montre, sur les poutres homogènes, que $\lambda_c = \lambda'_c$, *quelle que soit la nature et la grandeur des imperfections (qui doivent rester quand même raisonnablement petites).*

Comme λ_c *se calcule en général facilement à l'aide du modèle de la poutre parfaite, ceci démontre l'intérêt de la connaissance de cette charge critique du modèle théorique.*

Le problème consiste donc à mesurer la grandeur λ'_c *sur le système réel afin de la comparer avec la valeur de* λ_c *donnée par le modèle théorique parfait. Or le dépouillement direct des courbes* $\lambda = f(u_3^o)$ *ne permet pas d'effectuer cette mesure avec une précision suffisante. C'est pourquoi nous serons amenés à analyser deux méthodes assez fines , qui se sont montrées très performantes dans le cas des poutres homogènes isotropes, pour essayer de justifier leur application au cas de poutres composites.*

III.1. TYPES D'IMPERFECTIONS.

III.1.1 Imperfections de la poutre elle-même.

1°) *Inhomogénéité des proprietés élastiques et dimensionnelles*.

Elles sont en général négligeables lorsque l'on choisit correctement les échantillons. Nous n'en tiendrons pas compte ici.

2°) *Courbures initiales*.

Courbure de l'échantillon dans le plan de flexion de flambement. C'est une des imperfections les plus importantes. Cette courbure, même faible, initie la flexion de la poutre dès le début du chargement.

III.1.2. Imperfections dues au système de chargement.

La charge est généralement appliquée avec une légère excentricité e à une articulation. En conséquence, il y a apparition d'un petit moment de flexion $e\lambda$, proportionnel à λ, et qui fait fléchir la poutre dès le début du chargement.

III.2. EQUATION D'UNE POUTRE COMPOSITE MUNIE D'IMPERFECTIONS, (courbure initiale).

III.2.1. Expression des déplacements.

Déplacements initiaux (à $\lambda = 0$), à partir de la position rectiligne :

$$\begin{aligned} \overline{u_1}\ (x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ \overline{u_2}\ (x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ \overline{u_3}\ (x_1, x_2, x_3) &= \overline{u_3^\circ}\ (x_1) \end{aligned} \qquad (66)$$

$\overline{u_3^\circ}$ étant la déformé initiale dans le plan $(x_1\ 0\ x_3)$. Les déplacements totaux (à partir de la position rectiligne de la poutre parfaite) sont donnés par :

$$\begin{aligned} u_1^T\ (x_1,x_2,x_3) &= u_1^{\circ T}(x_1) + x_2\ \alpha(x_1) + x_3\ \beta(x_1) \\ u_2^T\ (x_1,x_2,x_3) &= u_2^{\circ T}(x_1) + x_2\ \gamma(x_1) \\ u_3^T\ (x_1,x_2,x_3) &= u_3^{\circ T}(x_1) - x_2\ \gamma(x_1) \end{aligned} \qquad (67)$$

Les déplacements dans la poutre, dus au chargement λ, sont :

$$u_1 = u_1^T - \overline{u_1} = u_1^\circ + x_2\ \alpha + x_3\ \beta$$

$$u_2 = u_2^T - \overline{u_2} = u_2^\circ + x_3\ \gamma$$

$$u_3 = u_3^T - \overline{u_3} = u_3^\circ - x_3\ \gamma$$

les déplacements : $u_1^\circ = u_1^{\circ T}$

$u_2^\circ = u_2^{\circ T}$

$u_3^\circ = u_3^{\circ T} - \overline{u_3^\circ}$

étant les déplacements de la fibre moyenne $x_2 = x_3 = 0$ de la poutre à partir de la position initiale.

Remarque :

Nous pouvons examiner l'influence d'imperfections correspondant à des déplacements initiaux $\overline{u_1^o}$ *et* $\overline{u_2^o}$ *et des rotations initiales* $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$. *Cependant, les termes ainsi modifiés interviennent linéairement dans les expressions des déformations telles que nous les prenons. Prendre en compte ces imperfections revient simplement à remplacer dans le développement qui suit* u_1^o, u_2^o, α, β *et* γ, *par* $u_1^{oT} - \overline{u_1^o}$, $u_2^{oT} - \overline{u_2^o}$, $\alpha^T - \bar{\alpha}$, $\beta^T - \bar{\beta}$ *et* $\gamma^T - \bar{\gamma}$ *respectivement. On vérifie alors facilement que ces imperfections sont sans influence sur le phénomène de flambage.*

III.2.2. Expression des déformations.

En reprenant les expressions des grandes déformations des plaques avec courbure initiale (36) et en les appliquant aux poutres, les déformations sont données par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(u_i^T - \overline{u_i})}{\partial x_j} + \frac{\partial(u_j^T - \overline{u_j})}{\partial x_i} + \frac{\partial u_3^T}{\partial x_i}\frac{\partial u_3^T}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_j}\right]$$

$$\varepsilon_{i3} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(u_i^T - \overline{u_i})}{\partial x_3} + \frac{\partial(u_3^T - \overline{u_3})}{\partial x_i}\right] \qquad (70)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial(u_3^T - \overline{u_3})}{\partial x_3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3^T}{\partial x_3}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_3}\right)^2 \equiv 0$$

les indices i et j variant de 1 à 2.

En utilisant les relations (67) et (68), il vient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= u_{1,1}^{oT} + x_1\,\alpha_{,1} + x_3\,\beta_{,1} + \frac{1}{2}\,(u_{3,1}^{oT})^2 - \frac{1}{2}\,(\overline{u_{3,1}^o})^2 \\
\varepsilon_2 &= 0 \\
\varepsilon_3 &= 0 \\
\varepsilon_4 &= 0 \\
\varepsilon_5 &= \beta + u_{3,1}^{oT} - \overline{u_{3,1}^o} - x_2\,\gamma_{,1} \\
\varepsilon_6 &= \alpha + u_{2,1}^{oT} + x_3\,\gamma_{,1}
\end{aligned} \qquad (71)$$

(Comme précédemment, nous négligeons les termes en $u_3^\circ\,\gamma$ et γ^2 dans les déformations).

III.2.3. Loi globale de comportement de la poutre.

Les relations (32) restent valables en remplaçant

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^\circ \\ \alpha + u_{2,1}^\circ \\ \beta_{,1} \\ \gamma_{,1} \\ \beta + u_{3,1}^\circ \\ \alpha_{,1} \end{bmatrix} \quad \text{par} \quad \begin{bmatrix} u_{1,1}^{\circ T} + \frac{1}{2}(u_{3,1}^{\circ T})^2 - \frac{1}{2}(\overline{u_{3,1}^\circ})^2 \\ \alpha + u_{2,1}^{\circ T} \\ \beta_{,1} \\ \gamma_{,1} \\ \beta + u_{3,1}^{\circ T} - \overline{u^\circ}_{3,1} \\ \alpha_{,1} \end{bmatrix} \qquad (72)$$

III.2.4. Equations d'équilibre.

III.2.4.1. *Equations générales.*

Dans l'énergie potentielle (39), on change u_3° en $u_3^{\circ T} - \overline{u_3^\circ}$, sauf le terme en $N\delta\varepsilon^\circ$ qui s'écrit alors :

$$N\,[\delta u_{1,1}^{\circ T} + u_{3,1}^{\circ T}\,\delta u_{3,1}^{\circ T}]$$

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$N_{,1} = 0 \qquad (a)$$

$$H_{,1} = 0 \qquad (b)$$

$$Q_{,1} + N\,u_{3,11}^{\circ T} = 0 \qquad (c) \qquad (73)$$

$$\mathcal{M}_{,1} = H \qquad (d)$$

$$M_{,1} = Q \qquad (e)$$

$$T_{,1} = 0 \qquad (f)$$

(seule l'équation (73c) est changée).

III.2.4.2. Equations d'équilibre en $u_3^{\circ T}$, $\overline{u_3^{\circ}}$ et β.

En vertu de (72) et (73), il vient :

$$\begin{aligned} Q &= A_{55}\,(\beta + u_{3,1}^{\circ T} - \overline{u_{3,1}^{\circ}}) \\ Q &= M_{,1} \\ Q_{,1} &+ N\, u_{3,11}^{\circ T} = 0 \\ M_{,1} &= D^{*}\, \beta_{,11} \end{aligned} \qquad (74)$$

D'où les deux équations d'équilibre :

$$\beta_{,111} + \Omega^2\,(\beta_{,1} - \overline{u_{3,11}^{\circ}}) = 0 \qquad (75)$$

avec

$$\Omega^2 = \frac{\lambda}{D^{*}\,(1 - \frac{\lambda}{A_{55}})} \quad ; \quad \lambda = -N$$

et

$$u_{3,1}^{\circ T} - \overline{u_{3,1}^{\circ}} = \frac{D^{*}}{A_{55}}\,(\beta_{,11} - \beta) \qquad (76)$$

Donnons enfin la relation suivante qui nous sera utile dans la suite:

$$\beta_{,1} = -\,(1 - \frac{\lambda}{A_{55}})\, u_{3,11}^{\circ T} + \overline{u_{3,11}^{\circ}} \qquad (77)$$

III.3. DETERMINATION DE λ_c PAR LA METHODE STATIQUE DE SOUTHWELL.

III.3.1. Historique et principe de la méthode.

C'est Young en 1807 (37) qui le premier donna la relation qui existe entre la flèche au centre d'une poutre chargée axialement par λ, la charge λ, et la charge classique d'Euler λ_c. Ayrton et Perry (38) ont utilisé cette formule pour interpréter des tests effectués sur des colonnes, faisant ainsi la première vérification expérimentale de la théorie d'Euler (23). Les résultats d'Young (37) consistent en une loi hyperbolique entre la flèche au centre et la charge, la charge λ_c étant une asymptote.

En 1922, Westergaard (39) retrouve ce résultat, dans une théorie plus générale, et démontre sa validité dans tout problème "linéaire" d'instabilité. Indépendamment, Southwell (40) en 1932, refait le même type d'approche sur une poutre chargée axialement et analyse les résultats expérimentaux de Von Karman (41). Southwell a montré, qu'au voisinage de la charge critique λ_c, les charges λ, λ_c et la variation de la flèche δ au centre de la poutre courbée initialement, sont reliées par une relation de la forme

$$\delta \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} - 1\right) = \delta_o \qquad (78)$$

δ_o représentant la flèche initiale de la poutre non chargée.

La courbe δ/λ en fonction de δ est donc une droite de pente $1/\lambda_c$ (Fig. 23).

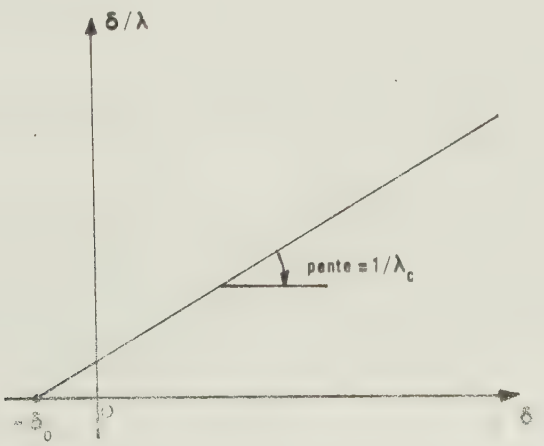

Figure 23

La méthode permet ainsi, à partir de mesures effectuées au voisinage de la charge critique, de déterminer celle-ci avec précision par une construction graphique.

Southwell a appliqué aussi cette méthode à une poutre chargée avec une excentricité, malheureusement sans justification théorique: les résultats expérimentaux obtenus ont été excellents. Il propose alors (toujours sans justification) l'application de la méthode à d'autres problèmes d'instabilité.

L'article de Southwell (40) fut le point de départ de nombreuses recherches, car la méthode préconisée a permis de grands espoirs pour le dépouillement des tests de stabilité sur les structures, l'interprétation de ces tests étant toujours assez ambigüe.

Lundquist (42) a généralisé un peu la méthode en donnant une formule utile quand on connaît mal les conditions à charge nulle. Fisher (43) a traité le problème général de la poutre avec courbure initiale, charge excentrée, forces transversales et couples appliqués proportionnels ou non à la charge axiale. Toutes ces "imperfections" se combinent de telle sorte qu'elles agissent comme une "excentricité équivalente", et la relation (78) peut être appliquée. Cet auteur a vérifié expérimentalement sa théorie et les résultats sont remarquablement bons. Donnel (44) dérive une formule identique pour une poutre avec un support élastique continu et Hayashi et Kihira (45) vérifient expérimentalement le résultat dans le cas d'un encastrement élastique : l'accord est très bon.

En 1961, Ariaratnam (46) démontre la validité de la méthode de Southwell pour une poutre mince (sans C.T.) chargée axialement, quelles que soient ses conditions aux limites, et pour les structures réticulées. Ce travail théorique apparaît comme l'un des plus satisfaisants à l'heure actuelle.

Parallèlement, des recherches sont effectuées sur les plaques. En 1933, Cox et Gough (47) appliquent la formule de Southwell au flambage de plaques soumises à un cisaillement plan. Les résultats furent satisfaisants. Les équations de flexion faible des plaques

chargées dans leur plan et légèrement courbées initialement de Timoshenko (36) permettent de valider la méthode de Southwell. D'autres vérifications expérimentales l'ont prouvé (48). Mais si la courbure initiale est trop importante, les flèches deviennent grandes assez rapidement, et il faut considérer le phénomène à l'aide des équations non linéaires des grandes flèches des plaques : dans ce cas, le graphe de Southwell n'est plus valable pour déterminer les charges critiques (44)(48). Des essais d'applications ont été faits dans le domaine du flambage thermoélastique des plaques et de l'instabilité locale des poutres épaisses (48)(49).

Enfin, Horton et Cundari (50) envisagent l'application de cette méthode aux coques cylindriques et sphériques, et reprennent les travaux de Donnel (44) et Flügge (51) ; bien que certains résultats expérimentaux soient positifs (pour des courbures initiales faibles), il se pose certains problèmes quant à la généralisation de la méthode de Southwell pour certaines coques (cylindriques).

Pour décrire l'état actuel de la question, soulignons deux points essentiels :

1) La méthode de Southwell est justifiée théoriquement et expérimentalement pour des structures imparfaites dont les instabilités peuvent être correctement étudiées (au moins en première approximation) à l'aide d'équations linéarisées. Ceci a été montré récemment (1968) d'une manière générale par Kjar (52), d'après les propositions de Southwell (40). On comprend donc que cette méthode soit correcte pour les poutres d'une part, et les plaques et coques ayant de très faibles imperfections et dont la flexion avant flambage reste très faible d'autre part.

2) Lorsque la structure considérée a des imperfections trop fortes, et que la flexion avant flambage devient suffisamment grande pour que les équations linéarisées ne soient plus correctes, le graphe de Southwell n'est plus une droite. Ceci a été considéré par Roorda (53) qui a étudié l'effet de non-linéarités sur la droite de Southwell. Les non-linéarités peuvent être de nature géométrique (couplage dans les plaques et les coques, les structures réticulées

de barres -ref. 48, 50, 53), ou dues à la loi de comportement (apparition de plasticité par exemple -ref. 48).

Notons enfin que, à notre connaissance, aucun travail n'a été fait sur les barres sensibles au cisaillement transversal. C'est pourquoi nous allons essayer de voir dans quelles conditions le graphe de Southwell est correct pour les poutres composites, où des couplages importants et nouveaux apparaissent, et où le cisaillement transversal est parfois non négligeable.

III.3.2. Validité de la méthode appliquée aux poutres composites.

III.3.2.1. Décomposition des fonctions u_3^{oT}, $\overline{u_3^o}$ et β en fonction des modes propres de flambage de la poutre parfaite.

Le point de départ du calcul que nous allons développer dans la suite repose sur la décomposition des fonctions u_3^{oT}, $\overline{u_3^o}$ et β en séries uniformément convergentes des modes propres de flambage $^r u_3^o$ et $^r\beta$ de la poutre parfaite. Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'il existe certaines relations d'orthogonalité entre les différents modes propres $^r u_3^o$ et $^r\beta$.

1°) *Orthogonalité des modes propres $^r u_3^o$.*

Les modes propres de flambage sont des fonctions propres $^r u_3^o$ et $^r\beta$ vérifiant des équations d'équilibre (50) de la poutre parfaite, qui peuvent alors s'écrire :

$$^r u_{3,1111}^o + \Omega_r^2 \; ^r u_{3,11}^o = 0 \qquad (79)$$

Ω_r étant la valeur propre correspondant à la charge critique λ_r.

En multipliant par le mode propre $^s u_3^o$ et en intégrant sur toute la longueur de la poutre, il vient :

$$\int_0^L (^s u_3^o \; ^r u_{3,111}^o + \Omega_r^2 \; ^s u_3^o \; ^r u_{3,11}^o) dx_1 = 0 \qquad (80)$$

En intégrant par partie :

$$\int_0^L {}^r u^\circ_{3,11}\ {}^s u^\circ_{3,11}\ dx_1 - \Omega_r^2 \int_0^L {}^r u^\circ_{3,1}\ {}^s u^\circ_{3,1}\ dx_1 = \tau \qquad (81)$$

$$\text{avec} \quad \tau = -\left[\left({}^r u^\circ_{3,111} + \Omega_r^2\ {}^r u^\circ_{3,1} \right) {}^s u^\circ_3 - {}^r u^\circ_{3,11}\ {}^s u^\circ_{3,1} \right]_0^L \qquad (82)$$

Or les conditions aux limites sont :

- <u>appui simple sur rotule ou couteau</u> :

$$u^\circ_3 = 0$$

$$M = D^* \beta_{,1} + \eta \frac{\beta(L)-\beta(0)}{L} = -\left(1 - \frac{\lambda}{A_{55}}\right) u^\circ_{3,11} + \eta \frac{\beta(L)-\beta(0)}{L} \qquad (83)$$

(poutre types 1 et 5),

$$M = -\left(1 - \frac{\lambda}{A_{55}}\right) u^\circ_{3,11} - \frac{B_{11}}{A_{11}} \lambda$$ (poutre de type 6),

- <u>encastrement</u> :

$$u^\circ_3 = 0 \qquad \beta = 0 \qquad (84)$$

τ s'annule si :

* $\eta = 0$ pour une articulation (certains couplages sont impossibles pour certaines conditions aux limites),

* ${}^s u^\circ_{3,1} = {}^s \beta$, c'est-à-dire si le cisaillement transversal est négligé dans le cas d'un encastrement, ou lorsqu'il y est nul.

En détaillant pour chaque type de conditions aux limites :

- C.L. type A : $\tau = 0$ sauf pour les poutres de type 6

- C.L. type B : $\tau = 0$ sauf pour les poutres de types 1, 2, 5 & 6 ($\eta \neq 0$)

- C.L. type C : $\tau = 0$ lorsque le cisaillement transversal est négligé (un seul encastrement), sauf pour les poutres de types 1, 2, 5 & 6 ($\eta \neq 0$)

- C. L. type D : $\tau = 0$ dans tous les cas car les cisaillements transversaux sont nuls aux encastrements.

Lorsque ces conditions sont remplies, nous avons :

$$\int_0^L {}^r u^\circ_{3,11} \; {}^s u^\circ_{3,11} \, dx_1 = \Omega_r^2 \int_0^L {}^r u^\circ_{3,1} \; {}^s u^\circ_{3,1} \, dx \qquad (85)$$

Nous aurions pu montrer de la même façon que :

$$\int_0^L {}^r u^\circ_{3,11} \; {}^s u^\circ_{3,11} \, dx_1 = \Omega_s^2 \int_0^L {}^r u^\circ_{3,1} \; {}^s u^\circ_{3,1} \, dx_1 \qquad (86)$$

Comme les valeurs propres Ω_r sont distinctes, nous tirons, des relations (85 et 86) :

$$\int_0^L {}^r u^\circ_{3,1} \; {}^s u^\circ_{3,1} \, dx_1 = 0$$

$$\int_0^L {}^r u^\circ_{3,11} \; {}^s u^\circ_{3,11} \, dx_1 = 0 \qquad \text{si } r \neq s \qquad (87)$$

et si $r = s$:

$$\int_0^L ({}^r u^\circ_{3,11})^2 \, dx_1 = \Omega_r^2 \int_0^L ({}^r u^\circ_{3,1})^2 \, dx_1 \qquad (88)$$

Si chaque ${}^{r}u_3^{\circ}$ est convenablement normé :

$$\int_0^L ({}^{r}u_{3,1}^{\circ})^2 \, dx_1 = 1 \qquad (89)$$

$$\int_0^L ({}^{r}u_{3,11}^{\circ})^2 \, dx_1 = \Omega_r^2 \qquad (90)$$

Le groupe d'équations (87- 90) constitue des relations d'orthogonalité entre les dérivées des modes propres de flambage ${}^{r}u_3^{\circ}$ de la poutre parfaite.

En conséquence, toute fonction $f(x_1)$ vérifiant les mêmes conditions aux limites que ${}^{r}u_3^{\circ}(x_1)$ peut être développée en une série uniformément convergente des modes propres ${}^{r}u_{3,1}^{\circ}(x_1)$:

$$f(x_1) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \, {}^{r}u_{3,1}^{\circ}(x_1) \qquad (a)$$

$$f_{,1}(x_1) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \, {}^{r}u_{3,11}^{\circ}(x_1) \qquad (b) \qquad (91)$$

avec $$a_r = \int_0^L f(x_1) \, {}^{r}u_{3,1}^{\circ}(x_1) \, dx_1 \qquad (92)$$

Ceci sous réserve, bien entendu, des conditions de nullité de τ, énoncées ci-dessus.

2°) *Orthogonalité des modes ${}^{r}\beta$ et ${}^{r}\beta_{,1}$.*

Le mode propre ${}^{r}\beta$ vérifie, par définition, l'équation d'équilibre (50) de la poutre parfaite :

$${}^{r}\beta_{,111} + \Omega_r^2 \, {}^{r}\beta_{,1} = 0 \qquad (93)$$

En multipliant par le mode propre ${}^{s}u_3^{\circ}$ et en intégrant sur toute la barre, il vient :

$$\int_0^L ({}^r\beta_{,111}\ {}^s u_3^\circ + \Omega_r^2\ {}^r\beta_{,1}\ {}^s u_3^\circ)\ dx_1 = 0 \qquad (94)$$

En intégrant par partie :

$$\int_0^L {}^r\beta_{,1}\ {}^s u_{3,11}^\circ\ dx_1 - \int_0^L \Omega_r^2\ {}^r\beta\ {}^s u_{3,1}^\circ\ dx_1 = \tau' \qquad (95)$$

avec :

$$\tau' = \left[- ({}^r\beta_{,11} + \Omega_r^2\ {}^r\beta)\ u_3^\circ + {}^r\beta_{,1}\ {}^s u_{3,1}^\circ \right]_0^L \qquad (96)$$

τ' s'annule aux mêmes conditions que τ , donc lorsque les modes propres ${}^s u_{3,1}^\circ$ et ${}^s u_{3,11}^\circ$ sont orthogonaux.

Or :
$${}^s\beta_{,1} = - \left(1 - \frac{\lambda\ s}{A_{55}}\right) {}^s u_{3,11}^\circ$$

$${}^s u_{3,1}^\circ = \frac{D^*}{A_{55}}\ {}^s\beta_{,11} - {}^s\beta$$

L'équation (95) s'écrit alors :

$$- \int_0^L \frac{\beta^r{}_{,1}\ \beta^s{}_{,1}}{1 - \frac{\lambda\ s}{A_{55}}}\ dx_1 - \Omega_r^2 \int_0^L \beta^r \left(\frac{D^*}{A_{55}}\ {}^s\beta_{,11} - {}^s\beta\right) dx_1 = 0 \qquad (97)$$

Mais :

$$\int_0^L \beta^r \left(\frac{D^*}{A_{55}}\ {}^s\beta_{,11} - {}^s\beta\right) dx_1 = - \int_0^L \left(\frac{D^*}{A_{55}}\ {}^r\beta_{,1}\ {}^s\beta_{,1} + {}^r\beta\ {}^s\beta\right) dx_1$$

$$+ \left[\frac{D^*}{A_{55}}\ {}^r\beta\ {}^s\beta_{,1} \right]_0^L = 0 \qquad (98)$$

Le terme entre crochets s'annule aux mêmes conditions que τ et τ' .
L'équation (97) s'écrit alors :

$$\int_0^L r_{\beta,1}\ s_{\beta,1}\ dx_1 + \frac{\Omega^2 r}{Krs} \int_0^L r_\beta\ s_\beta dx_1 = 0 \qquad (99)$$

avec : $$Krs = \frac{\lambda r / A_{55}}{1 - \frac{\lambda\ r}{A_{55}}} - \frac{1}{1 - \frac{\lambda\ s}{A_{55}}} \qquad (100)$$

De même, nous aurions pu montrer que :

$$\int_0^L r_{\beta,1}\ s_{\beta,1}\ dx_1 + \frac{\Omega^2 s}{Ksr} \int_0^L r_\beta\ s_\beta\ dx_1 = 0 \qquad (101)$$

Mais comme $\frac{\Omega^2 r}{Krs} \neq \frac{\Omega^2 s}{Ksr}$ nous avons les relations d'orthogonalité suivantes :

- si $r \neq s$:

$$\int_0^L r_\beta\ s_\beta\ dx_1 = 0 \qquad (a)$$

$$\int_0^L r_{\beta,1}\ s_{\beta,1}\ dx_1 = 0 \qquad (b) \qquad (102)$$

- si $r = s$:

$$\int_0^L (s_{\beta,1})^2\ dx_1 = \Omega_s^2 \qquad (a)$$

$$\int_0^L (s_\beta)^2\ dx_1 = 1 \qquad (b) \qquad (103)$$

en normant convenablement chaque $s_\beta(x_1)$.

Donc les modes propres ${}^s\beta$ et ${}^s\beta_{,1}$ sont orthogonaux aux mêmes conditions que ${}^s u^\circ_{3,1}$ et ${}^s u^\circ_{3,11}$. Toute fonction $g(x_1)$ vérifiant les mêmes conditions aux limites que ${}^s\beta$ peut se développer en série uniformément convergente de ${}^s\beta$:

$$g(x_1) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \; {}^s\beta\,(x_1) \qquad \text{(a)}$$

$$g_{,1}(x_1) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \; {}^s\beta_{,1}\,(x_1) \qquad \text{(b)} \qquad (104)$$

avec $$b_s = \int_0^L g(x_1)\; {}^s\beta\,(x_1)\, dx_1 \qquad (105)$$

3°) *Conclusions*.

Le tableau (III.1) résume les cas où les propriétés d'orthogonalité sont vérifiées. Nous voyons qu'elles sont mises en défaut lorsque certains couplages existent ($\eta \neq 0$), et lorsque l'on ne néglige pas le cisaillement transversal dans une poutre encastrée à une seule extrêmité (lorsque les deux extrêmités sont encastrées, le cisaillement transversal est nul aux encastrements).

Sous les réserves faites, nous pouvons donc poser :

$$u^{\circ T}_{3,1}\,(x_1) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \; {}^r u^\circ_{3,1}\,(x_1) \qquad \text{(a)}$$

$$u^{\circ T}_{3,11}\,(x_1) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \; {}^r u^\circ_{3,11}\,(x_1) \qquad \text{(b)}$$

$$\overline{u^\circ_{3,1}}\,(x_1) = \sum_{r=1}^{\infty} \overline{a_r} \; {}^r u^\circ_{3,1}\,(x_1) \qquad \text{(c)}$$

$$\overline{u^\circ_{3,11}}\,(x_1) = \sum_{r=1}^{\infty} \overline{a_r} \; {}^r u^\circ_{3,1}\,(x_1) \qquad \text{(d)} \qquad (106)$$

TABLEAU III.1

Validité mathématique du graphe de Southwell : orthogonalité des modes propres de flambage ${}^{r}u_3^{o}$ et ${}^{r}\beta$.

Echantillon N°	Conditions aux limites type			
	A	B	C	D
1	correct	?	?	correct
2	correct	?	?	correct
3	correct	correct	correct en négligeant C.T.	correct
4	correct	correct	correct en négligeant C.T.	correct
5	correct	?	?	correct
6	?	?	?	correct

? = aucune conclusion.

$$\beta(x_1) = \sum_{r=1}^{\infty} b_r \, {}^r\beta(x_1) \qquad (e)$$

$$\beta_{,1}(x_1) = \sum_{r=1}^{\infty} b_r \, {}^r\beta_{,1}(x_1) \qquad (f)$$

$$(a_r, \overline{a_r}) = \int_0^L ({}^{o}u_{3,1}^{T}, \overline{u_{3,1}^{o}}) \, {}^r u_{3,1}^{o} \, dx_1 \qquad (g)$$

$$b_r = \int_0^L \beta \, {}^r\beta \, dx_1 \qquad (h)$$

Remarquons que ces développements en série ne sont corrects que lorsque l'imperfection initiale $\overline{u_3^o}$ vérifie les mêmes conditions aux limites que les modes propres ${}^r u_3^o$. Ceci ne permet donc pas de prendre en compte dans le calcul qui suit des imperfections du type excentricité de la charge (moment fléchissant non nul à l'articulation).

III.3.2.2. Calcul des coefficients a_r et b_r. Graphe de Southwell dans le cas d'une courbure initiale.

Remarque :

D'après ce que nous avons dit au paragraphe précédent, il s'avère nécessaire que l'imperfection du type courbure initiale que nous envisageons ici soit telle que $\overline{u_3^o}$ vérifie les mêmes conditions aux limites géométriques que ${}^r u_3^o$. Nous supposerons qu'il en est ainsi dans ce qui suit.

1°) *Variation de l'énergie de déformation.*

La variation de l'énergie de déformation dans un champ de déplacements virtuels cinématiquement admissible s'écrit, en tenant compte des déformations initiales :

$$\delta V = \int_0^L [\, N(\delta u_{1,1}^{\circ T} + u_{3,1}^{\circ T}\ \delta u_{3,1}^{\circ T}) + M\ \delta\beta_{,2} + H(\delta\alpha + \delta\, u_{,1}^{\circ T})$$

$$+ T\ \delta\gamma_{,1} + Q(\delta\beta + \delta u_{3,1}^{\circ T}) + \mathcal{R}\delta\alpha_{,1}\,]\, dx_1 \qquad (107)$$

(car $\delta\overline{u_3^\circ} = 0$).

Nous ne considérerons dans le calcul qui suit que les termes en $\delta u_3^{\circ T}$ et $\delta\beta$, les autres étant analogues à ceux du Chapitre I.

Donc :

$$\delta V_1 = \int_0^L [(N\ u_{3,1}^{\circ T} + Q)\ \delta u_{3,1}^{\circ T} + M\ \delta\beta_{,1} + Q\ \delta\beta]dx_1 \qquad (108)$$

Or :

$$\int_0^L (M\ \delta\beta_{,1} + Q\ \delta\beta)\ dx_1 = \int_0^L (-\ M_{,1} + Q)\delta\beta\ + [M\ \ \delta\beta]_0^L = 0 \qquad (109)$$

Le terme entre crochets est toujours nul compte tenu des conditions aux limites, et nous retrouvons l'équation d'équilibre :

$$M_{,1} = Q \qquad (110)$$

Donc, d'après la loi de comportement :

$$Q = D^*\ \ (\beta_{,11}) \qquad (111)$$

Et :

$$\delta V_1 = \int_0^L [\, N\ u_{3,1}^{\circ T} + D^*\ \beta_{,11}\ \ \ \delta u_{3,1}^{\circ T}]dx_1 \qquad (112)$$

En intégrant par partie :

$$\delta V_1 = \int_0^L [N\, u_{3,1}^{\circ T}\, \delta u_{3,1}^{\circ T} - D^*\, \beta_{,1}\quad \delta u_{3,11}^{\circ T}]\, dx_1 + [D^*\, \beta_{,1}\quad u_{3,1}^{\circ T}]_0^L \quad , \quad (113)$$

Le terme entre crochets est encore nul, dans les conditions que nous nous sommes fixées (voir paragraphe précédent).

2°) *Choix du champ de déplacement virtuel*.

Choisissons comme champ de déplacement virtuel :

$$u_{3,1}^{\circ T} = \sum_{r=1}^{\infty} \delta a_r\, {}^r u_{3,1}^{\circ} \qquad (a)$$

$$u_{3,11}^{\circ T} = \sum_{r=1}^{\infty} \delta a_r\, {}^r u_{3,11}^{\circ} \qquad (b) \qquad (114)$$

les variations δa_r étant absolument arbitraires.

3°) *Equations d'équilibre en a_r et b_r*.

$$\delta V_1 = N \int_0^L \Big(\sum_r a_r\, {}^r u_{3,1}^{\circ}\Big)\Big(\sum_s \delta a_s\, {}^s u_{3,1}^{\circ}\Big)\, dx_1 - D^* \int_0^L \Big(\sum_r b_r\, {}^r \beta_{,1}\Big)\Big(\sum_s \delta a_s\, {}^s u_{3,11}^{\circ}\Big) dx_1 \qquad (115)$$

En remarquant que :

$${}^r \beta_{,1} = -\Big(1 - \frac{\lambda_r}{A_{55}}\Big)\, {}^r u_{3,11}^{\circ} \qquad (116)$$

et en tenant compte des propriétés d'orthogonalités des fonctions ${}^r u_3^{\circ}$ et ${}^r \beta$, il vient :

$$\delta V_1 = \sum_r (N\, a_r + \lambda_r\, b_r)\, \delta a_r = 0 \quad \text{(à l'équilibre)} \qquad (117)$$

En identifiant terme à terme et en posant $N = -\lambda$, pour tout r (δa_r étant des variations arbitraires), nous avons :

$$\lambda a_r = \lambda_r b_r \qquad (118)$$

Mais les relations (77), (116) et (106) permettent d'écrire :

$$b_r = \frac{1 - \frac{\lambda}{A_{55}}}{1 - \frac{\lambda_r}{A_{55}}} a_r - \frac{\overline{a_r}}{1 - \frac{\lambda_r}{A_{55}}} \qquad (119)$$

En reportant dans (118) :

$$a_r = \frac{\overline{a_r}}{1 - \frac{\lambda}{A_{55}}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_r} \cdot \left(\frac{1 - \frac{\lambda_r}{A_{55}}}{1 - \frac{\lambda}{A_{55}}} \right)^2} \qquad (120)$$

$$b_r = - \frac{\overline{a_r}}{1 - \frac{\lambda_r}{A_{55}}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda_r}{\lambda} \left(\frac{1 - \frac{\lambda}{A_{55}}}{1 - \frac{\lambda_r}{A_{55}}} \right)^2} \qquad (121)$$

4°) *Graphe de Southwell.*

Lorsque λ approche la valeur λ_r :

$$\left.\begin{array}{l} a_r \gg a_s \\ b_r \gg b_s \end{array}\right\} \quad r \neq s$$

Si tous les $\overline{a_r}$ sont approximativement du même ordre de grandeur. En particulier, lorsque λ approche λ_c (r=1) :

$$\begin{array}{ll} u_3^{\circ T}(x_1) \neq a_1 \, {}^1u_3^{\circ}(x_1) & (a) \\ \beta \neq b_1 \, {}^1\beta(x_1) & (b) \end{array} \qquad (122)$$

ou :

$$u_3^{\circ T} - \overline{u_3^{\circ}} = -\bar{a}_1 \, {}^1u_3^{\circ} \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{A_{55}}} \; \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_c} \left(\frac{1 - \frac{\lambda_c}{A_{55}}}{1 - \frac{\lambda}{A_{55}}} \right)^2} \right] \qquad (123)$$

$$\beta = \frac{-\overline{a_1}}{1 - \frac{\lambda_c}{A_{55}}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda_c}{\lambda} \left(\frac{1 - \frac{\lambda}{A_{55}}}{1 - \frac{\lambda_c}{A_{55}}} \right)^2} \; {}^1\beta \, (x_1) \qquad (124)$$

En remarquant que :

$$\frac{\lambda}{A_{55}} \, , \, \frac{\lambda_c}{A_{55}} \ll 1 \qquad ; \qquad \frac{1 - \frac{\lambda}{A_{55}}}{1 - \frac{\lambda_c}{A_{55}}} \neq 1$$

et en posant :

$$\Theta \, (x_1) = \frac{-\bar{a}_1}{1 - \frac{\lambda_c}{A_{55}}} \; {}^1\beta \, (x_1) \qquad (125)$$

$$\beta_{,1} \, (x_1) = w_1 \, (x_1) \qquad (126)$$

(w_1 = courbure de la poutre au point x_1 que l'on peut mesurer avec des jauges par exemple).

Il vient :

$$\frac{w_1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_c} \, (w_1 + \Theta) \qquad (127)$$

En portant w_1/λ en fonction de w_1, nous obtenons une droite de pente $1/\lambda_1$ qui permet de mesurer la charge critique λ_1 (Fig. 24).

La relation (123) montre que nous pouvons obtenir le même résultat sur la mesure des flèches $u_3^{\circ T} - \overline{u_3^{\circ}}$ en négligeant le cisaillement transversal.

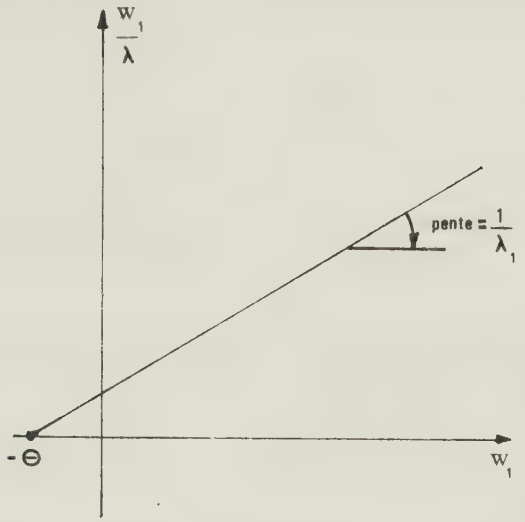

Figure 24

5°) *Conclusions.*

Nous avons montré que :

a) lorsque les conditions d'orthogonalité des modes propres de flambage sont vérifiés ($\eta = 0$, cisaillement transversal nul ou négligé pour un encastrement), et que les courbures initiales vérifient les mêmes conditions aux limites que les modes propres de flambage, le graphe de Southwell est une droite de pente $1/\lambda_c$ lorsqu'il est construit à partir des mesures de courbure de flexion.

b) dans les mêmes conditions, le graphe de Southwell est une droite de pente $1/\lambda_c$ quand il est construit à partir de mesures de flèches, en négligeant le cisaillement transversal. Nous ne pouvons rien dire dans le cas contraire.

III.3.2.3. Excentricité de la charge.

Dans le cas d'une excentricité de la charge à une articulation,

il n'est plus possible de développer $u_3^{\circ T}$ en fonction des modes propres, car cette fonction ne vérifie plus les mêmes conditions aux limites que les modes propres (M = 0 à l'extrêmité est remplacé par M = $e\lambda$, e = excentricité).

Nous allons traiter un cas particulier pour voir si l'emploi du graphe de Southwell est justifiée pour ce type d'imperfections.

Le problème se pose en ces termes :

$$\beta_{,111} + \Omega^2 \beta_{,1} = 0 \qquad (a)$$

$$\beta(x_1) = C_1 \cos \Omega x_1 + C_2 \sin \Omega x_1 + C_3 \qquad (b) \qquad (128)$$

$$u_3^{\circ}(x_1) = \frac{-C_1 \sin \Omega x_1}{(1 - \frac{\lambda}{A_{55}})} + \frac{C_2 \cos \Omega x_1}{(1 - \frac{\lambda}{A_{55}})} - C_3 x_1 + C_4 \qquad (c)$$

Conditions aux limites :

$$M = D^* \beta_{,1} + \eta \frac{\beta(L) - \beta(0)}{L} \qquad (a)$$

$$M(0) = e \lambda \; ; \; u_3(0) = 0 \qquad (b) \qquad (129)$$

$$M(L) = e \lambda \; ; \; u_3(L) = 0 \qquad (c)$$

(Nous prenons une poutre articulée-articulée avec la même excentricité aux deux extrêmités).

Nous trouvons, tous calculs faits :

$$u_3^{\circ}(x_1) = \frac{e \lambda L^2}{\Omega L (1 - \frac{\lambda}{A_{55}})(D^* \Omega L + 2 \eta \operatorname{tg} \frac{\Omega L}{2})} [\operatorname{tg} \frac{\Omega L}{2} \sin \Omega x_1 + 1 - \cos \Omega x_1] \qquad (130)$$

Si $\eta \neq 0$, u_3° devient infini pour :

$$D^* \Omega L + 2 \eta \operatorname{tg} \frac{\Omega L}{2} = 0 \qquad (131)$$

Nous retrouvons l'équation qui donne λ_c dans ce cas. Il n'est malheureusement pas possible de calculer λ_c analytiquement et de développer des calculs justifiant la méthode de Southwell. Par contre, cela est possible lorsque $\eta = 0$. Dans ce dernier cas, u_3° devient infini pour :

$$\frac{\Omega L}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Plaçons-nous par exemple à $x_1 = L/2$:

$$u_3^\circ (L/2) = e \left[\operatorname{tg} \frac{\Omega L}{2} \sin \frac{\Omega L}{2} + 1 - \cos \frac{\Omega L}{2} \right] \qquad (132)$$

Développons u_3° autour de $\lambda = \lambda_c$, c'est-à-dire autour de $\Omega L = \pi$:

$$\sin \frac{\Omega L}{2} = \cos \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\Omega L}{\pi}\right) \# 1 - \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\Omega L}{\pi}\right)^2 \qquad (133)$$

$$\cos \frac{\Omega L}{2} = \sin \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\Omega L}{\pi}\right) \# \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\Omega L}{\pi}\right) \qquad (134)$$

et $\frac{\Omega L}{\pi} = \frac{\lambda}{\lambda_c}$.

Puis en posant $\lambda = \lambda_c (1-\varepsilon)$:

$$u_3^\circ \left(\frac{L}{2}\right) = - \frac{4e}{\pi} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_c}{\lambda}} \left[1 + (1 + \frac{\pi}{4})\varepsilon + \frac{3\pi(\pi-1)}{8} \varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3) \right] \qquad (135)$$

Et en traçant le graphe de Southwell :

$$\frac{u_3^\circ \left(\frac{L}{2}\right)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_c} \left(u_3^\circ + \frac{4e}{\pi}\right) \left[1 + (1 + \frac{\pi}{4})\varepsilon + \frac{3\pi}{8} (\pi - 1) \varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3) \right]; \qquad (136)$$

Nous voyons sur la relation (136) que le graphe de Southwell n'est valable (droite de pente $1/\lambda_c$) que pour λ très proche de λ_c ($\varepsilon \to 0$).

En faisant le calcul sur les courbures, on obtient un résultat analogue.

III.3.2.4. Conclusions générales sur la validité de la méthode de Southwell.

D'après l'étude précédente, nous pouvons dire :

1°) Pour une poutre composite encastrée à ses deux extrêmités (C.L. D), il est possible de justifier strictement la méthode de Southwell.

2°) Si les deux extrêmités sont en appui simple (C.L. A & B), la méthode de Southwell est toujours justifiée sauf dans le cas où η est non nul, c'est-à-dire lorsque certains couplages sont présents pour les conditions aux limites B (Cf. tableau III.1).

3°) Si une seule extrêmité est encastrée et l'autre appuyée (C.L. C), la méthode de Southwell n'est justifiée que si $\eta = 0$ et si le cisaillement transversal est négligé.

4°) Les points 1°, 2°, 3° sont vrais pour une imperfection de type courbure initiale adéquate. Nous pouvons cependant dire que, pour une courbure initiale ne vérifiant pas strictement les conditions aux limites, les imperfections qui ont la forme des modes de flambage sont les plus importantes, il peut donc être correct dans la pratique de ne considérer que ce type d'imperfections de courbure. La méthode de Southwell serait donc correcte quelle que soit la courbure initiale de la barre.

5°) Dans le cas d'une imperfection type excentricité de la charge, la justification de la méthode de Southwell est discutable. Seule la pratique peut permettre de conclure. En fait, dans les expériences que nous avons effectuées, nous avons essayé de diminuer au maximum ce type d'imperfection afin que l'influence de la courbure initiale soit prépondérente.

6°) Remarquons que ce qui vient d'être démontré n'est pas valable a priori pour les poutres du type 6. Mais nous avons montré que le couplage qui apparaît dans ce type de barre est absolument équivalent à une excentricité. Donc tout ce que nous venons de dire dans le § 5° s'applique à ce cas : lorsqu'une courbure apparaît sur une

poutre de type 6, le problème équivaut à celui d'une autre poutre avec courbure et excentricité. Donc si le couplage n'est pas trop fort, la méthode de Southwell peut être correcte.

7°) Lorsque $\eta \neq 0$, c'est-à-dire lorsque certains couplages existent et pour certaines conditions aux limites (Cf tableau III.1), nous ne pouvons rien conclure. Seule l'expérience peut nous renseigner sur la validité de la méthode de Southwell.

Ces conclusions sont résumées sur le tableau III.2.

TABLEAU III.2

Validité de la méthode de Southwell dans la pratique.

Echantillon N°	Conditions aux limites type			
	A	B	C	D
1	justifiée	?	?	justifiée
2	justifiée	?	?	justifiée
3	justifiée	justifiée	justifiée	justifiée
4	justifiée	justifiée	justifiée	justifiée
5	justifiée	?	?	justifiée
6	justifiée*	justifiée*	justifiée*	justifiée

? = aucune justification n'a pu être faite

* = méthode justifiée si le couplage est assez faible.

III.4. METHODE DES VIBRATIONS LIBRES DE FLEXION.

III.4.1. Présentation de la méthode sur le cas simple d'une poutre homogène, isotrope, sensible au cisaillement transversal, et ayant ses deux extrêmités articulées.

La poutre est chargée axialement par une force constante $N=-\lambda$. Sa masse volumique est ρ.
L'équation d'équilibre dynamique de la poutre en oscillation libre de flexion est (oscillations très petites) :

$$u^{\circ}_{3,1111} + \frac{\lambda}{D^{*}\left(1 - \frac{\lambda}{A_{55}}\right)} u^{\circ}_{3,11} + \frac{b\,h\,\rho}{D^{*}\left(1 - \frac{\lambda}{A_{55}}\right)} \frac{d^2}{dt^2}\left(u^{\circ}_{3}\right)$$

$$+ \frac{b\,h\,\rho}{A_{55}\left(1 - \frac{\lambda}{A_{55}}\right)} \frac{d^2}{dt^2}\left(u^{\circ}_{3,11}\right) = 0 \qquad (137)$$

(nous négligeons l'inertie de rotation puisque l'amplitude des vibrations est supposée très petite).

La solution générale de (137) est de la forme :

$$u^{\circ}_{3}\left(x_1,t\right) = \sum_{i} F_i\left(x_1\right) T_i\left(t\right) \qquad (138)$$

Lorsque la poutre vibre sur le $n^{ième}$ mode propre, la solution se réduit à :

$$u^{\circ}_{3}\left(x_1,t\right) = F(x)\,T(t) \qquad (139)$$

$$T(t) = \sin\left(\omega_n t + \phi\right) \qquad (140)$$

($\phi = 0$ avec des conditions initiales appropriées).

$F(x)$ s'écrit alors :

$$F(x_1) = \mu_1 \operatorname{ch} \xi_1 x_1 + \mu_2 \operatorname{sh} \xi_1 x_1 + \mu_3 \cos \xi_2 x_1 + \mu_4 \sin \xi_2 x_1 ; \qquad (141)$$

En explicitant les deux conditions d'articulations aux extrêmités :

$$F(0) = F(L) = 0 \qquad (a)$$

$$F_{,11}(0) = F_{,11}(L) = 0 \qquad (b) \qquad (142)$$

nous pouvons calculer la valeur de la $n^{ième}$ pulsation propre de vibration. Finalement, il vient :

$$\frac{\omega^2_{n|\lambda}}{\omega^2_{n|\lambda=0}} = 1 - \frac{\lambda}{n^2\,\lambda_c} \qquad (143)$$

λ_c étant la charge critique de la poutre. En traçant l'évolution de $\omega^2_{n|\lambda}$ en fonction de λ , on obtient donc une droite dont l'ordonnée à $\omega^2_{n|\lambda} = 0$ est la charge $n^2\,\lambda_c$.

En particulier pour n = 1, le graphe est représenté sur la Figure 25.

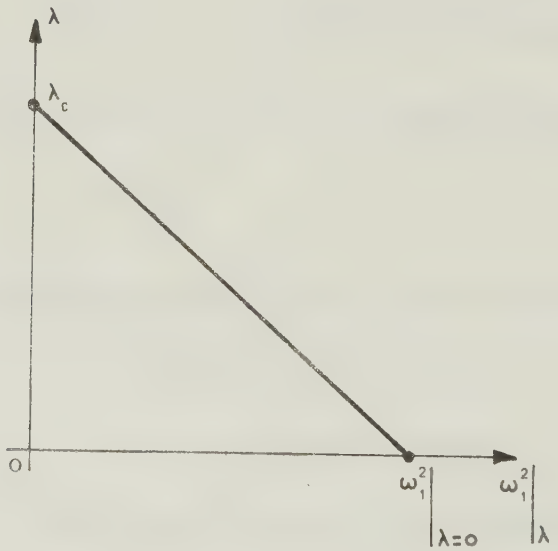

Figure 25

Donc, en mesurant quelques valeurs de $\omega_{1|\lambda}$ pour $\lambda < \lambda_c$, il est possible d'extrapoler la droite et d'obtenir λ_c sans charger la poutre jusqu'à λ_c.

Lurie (54) a montré que pour d'autres types de conditions aux limites (encastrement aux deux extrêmités), la relation $\lambda = f(\omega^2_{1|\lambda})$ est quasi linéaire, et que l'on a $\omega_{1|\lambda} = 0$ pour $\lambda = \lambda_c$.

Cette méthode a été appliquée avec succès à la détermination de la charge critique de poutres chargées axialement, d'une part avec des conditions aux limites variées, par Lurie (54) et Jacobson & Wenner (55),et d'autre part avec inertie variable par Wilson et al. (56).

III.4.2. Généralisation de la méthode.

Le phénomène décrit ci-dessus peut se placer dans le cadre plus général de la théorie de la stabilité des structures élastiques. Ziegler (33) a montré que, pour un système élastique à nombre fini de degrés de liberté, une petite perturbation (par exemple une vibration libre ici) autour de la position d'équilibre reste finie si $\lambda < \lambda_c$, et tend à augmenter infiniment si $\lambda > \lambda_c$. Lorsque $\lambda = \lambda_c$, la fréquence propre de vibration s'annule alors. L'extension aux systèmes continus (nombre infini de degrés de liberté) régis par des équations linéaires n'est pas démontrée en général.

Cependant, Reiss et Matkowsky (57) ont montré qu'une poutre élastique mince chargée axialement est dynamiquement stable (vibrations libres bornées par exemple) tant qu'elle est statiquement stable. Nous admettrons cette généralisation pour les poutres composites dont le comportement est régi par des équations linéaires (flexion faible autour de la position d'équilibre).

III.4.3. Influence des imperfections et des conditions pratiques de chargement.

Ce qui a été dit dans les deux paragraphes précédents est vrai en toute rigueur pour une poutre chargée axialement par une force constante λ. Ceci est très difficilement réalisable en pratique. Nous verrons que le dispositif de chargement est une machine dure qui impose le déplacement des deux extrêmités de la barre.

En conséquence, il se produit un effet d'allongement de la fibre moyenne de la poutre pendant le mouvement de vibration, ce qui a tendance à faire diminuer la force λ appliquée. Cet effet se traduit par un terme non-linéaire dans l'équation d'équilibre dynamique de la poutre (57 & 58).

Donc, pour une charge donnée, si la poutre a une légère imperfection initiale, elle fléchit légèrement, et les vibrations ne sont plus symétriques par rapport à la position d'équilibre statique. On constate alors expérimentalement une augmentation des fréquences propres, et la caractéristique $\lambda = f(\omega^2_{1|\lambda})$ a l'allure donnée sur la Figure 26.

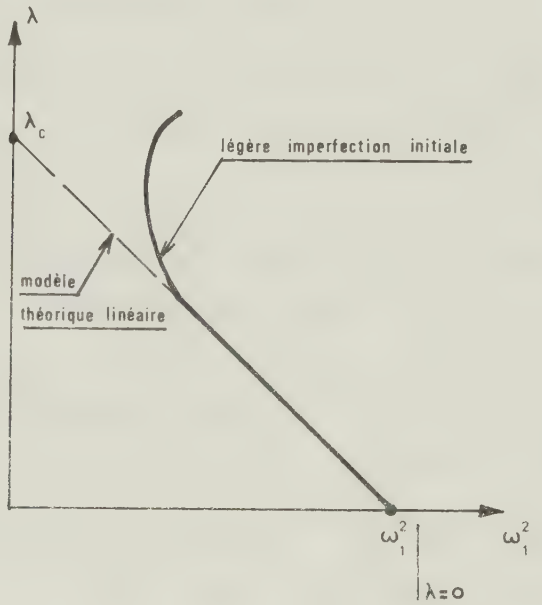

Figure 26

Tseng et Dugundji (59) ont montré que ce phénomène est dû à un couplage paramétrique entre le mode fondamental de vibration et les modes d'ordres supérieurs, couplage qui est fonction de la courbure statique du barreau comprimé.

Néanmoins, si les imperfections sont suffisamment faibles, le début de la courbe réelle est confondu avec la courbe théorique, et il est encore possible de faire l'extrapolation jusqu'à λ_c.

III.4.4. Application de la méthode aux poutres composites.

III.4.4.1. Equation d'équilibre dynamique.

Considérons la poutre composite soumise à des vibrations transversales libres.

Les composantes de la vitesse de chaque point (x_1,x_2,x_3) sont, à l'instant t :

$$v_j = \frac{du_j}{dt} = v_j\ (x_1,x_2,x_3,t) \qquad (j = 1,2,3) \tag{144}$$

La densité en chaque point est (densité moyenne de chaque couche) : $\rho\ (x_3)$.

L'énergie cinétique totale emmagasinée dans la poutre est :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint_{\text{poutre}} \rho\ (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)\ dx_1\ dx_2\ dx_3 \tag{145}$$

Le Lagrangien du système s'écrit :

$$\mathcal{L} = -V - U + E_c \tag{146}$$

V et U étant les énergies potentielles calculées au chapitre I.

Appliquons le principe de Hamilton. L'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\ dt \tag{147}$$

est minimale pour la solution d'équilibre, quels que soient les temps t_1 et t_2 $(t_1 < t_2)$. En d'autres termes, la variation première de l'intégrale (147) est nulle autour de la solution d'équilibre, pour toute variation cinématiquement admissible du champ de déplacement :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\ dt = 0 \tag{148}$$

Les variables d'espace et la variable de temps étant indépendantes, nous pouvons écrire :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta E_c\, dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta(U + V)\, dt = 0 \qquad (149)$$

$\delta(U+V)$ a été calculé au Chapitre I.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E_c\, dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\text{poutre}} \rho\left(\frac{du_1}{dt}\frac{d}{dt}\delta u_1 + \frac{du_2}{dt}\frac{d}{dt}\delta u_2 + \right.$$

$$\left.\frac{du_3}{dt}\frac{d}{dt}\delta u_3\right) dx_1\, dx_2\, dx_3 \qquad (150)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E_c\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\text{poutre}} \rho\left(\frac{d^2u_1}{dt^2}\delta u_1 + \frac{d^2u_2}{dt^2}\delta u_2 + \right.$$

$$\left.\frac{d^2u_3}{dt^2}\delta u_3\right) dx_1 dx_2 dx_3 + \left[\iiint_V dx_1 dx_2 dx_3 \rho\left(\frac{du_1}{dt}\delta u_1 + \frac{du_2}{dt}\delta u_2 + \frac{du_3}{dt}\delta u_3\right)\right]_{t_1}^{t_2} ; \qquad (151)$$

Le terme entre crochets de la relation (151) ne dépend que des conditions initiales et finales. Nous pouvons donc l'annuler en choisissant δu_1, δu_2 et δu_3 nuls à t_1 et t_2.

En reprenant les expressions (18), il vient :

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} = \frac{d^2u_1^\circ}{dt^2} + x_2\frac{d^2\alpha}{dt^2} + x_3\frac{d^2\beta}{dt^2} \qquad (a)$$

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} = \frac{d^2u_2^\circ}{dt^2} + x_3\frac{d^2\gamma}{dt^2} \qquad (b) \qquad (152)$$

$$\frac{d^2 u_3}{dt^2} = \frac{d^2 u_3}{dt^2} - x_2 \frac{d^2 \gamma}{dt^2} \qquad (c)$$

En reportant dans (151) :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E_c = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\left(I_\rho \frac{d^2 u_1^\circ}{dt^2} + J_\rho \frac{d^2 \beta}{dt^2} \right) \delta u_1^\circ \right.$$

$$+ \left(I_\rho \frac{d^2 u_2^\circ}{dt^2} + J_\rho \frac{d^2 \gamma}{dt^2} \right) \delta u_2^\circ + I_\rho \frac{d^2 u_3^\circ}{dt^2} \delta u_3^\circ + \frac{b^2}{12} I_\rho \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \delta \alpha$$

$$+ \left(J_\rho \frac{d^2 u_1^\circ}{dt^2} + K_\rho \frac{d^2 \beta}{dt^2} \right) \delta \beta$$

$$\left. + \left(J_\rho \frac{d^2 u_2^\circ}{dt^2} + K_\rho \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + \frac{b^2}{12} I_\rho \frac{d^2 \gamma}{dt^2} \right) \delta \gamma \right] dx_1 dt \qquad (153)$$

avec :

$$I_\rho = b \int_{-h/2}^{+h/2} \rho(x_3)\, dx_3 \qquad (a)$$

$$J_\rho = b \int_{-h/2}^{+h/2} x_3\, \rho(x_3)\, dx_3 \qquad (b) \qquad (154)$$

$$K_\rho = b \int_{-h/2}^{+h/2} x_3^2\, \rho(x_3)\, dx_3 \qquad (c)$$

I_ρ est la masse par unité de longueur de poutre et K_ρ est le moment d'inertie de rotation par unité de longueur de poutre.

J_ρ est un terme d'inertie qui correspond au décalage du centre de gravité de la section par rapport à la ligne moyenne ; J_ρ est donc nul lorsque la variation des densités $\rho(x_3)$ est symétrique suivant l'épaisseur.

En tenant compte des variations δV et δU données par les relations (40 & 41), et grâce à la relation (153), nous obtenons :

a) les équations d'équilibre dynamique.

$$N_{,1} - I_\rho \frac{d^2 u_1^\circ}{dt^2} - J_\rho \frac{d^2\beta}{dt^2} = 0 \qquad (a)$$

$$H_{,1} - I_\rho \frac{d^2 u_2^\circ}{dt^2} - J_\rho \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0 \qquad (b)$$

$$N_{,1}\, u_{3,1}^\circ + N\, u_{3,11}^\circ + Q_{,1} - I_\rho \frac{d^2 u_3^\circ}{dt^2} = 0 \qquad (c)$$

$$\mathcal{R}_{,1} - H + \frac{b^2}{12} I_\rho \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0 \qquad (d) \qquad (155)$$

$$M_{,1} - Q - J_\rho \frac{d^2 u_1^\circ}{dt^2} - K_\rho \frac{d^2\beta}{dt^2} = 0 \qquad (e)$$

$$T_{,1} - J_\rho \frac{d^2 u_2^\circ}{dt^2} - \left(K_\rho + \frac{b^2}{12} I_\rho\right) \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0 \qquad (f)$$

b) les conditions aux limites, qui sont les mêmes que celles données par les relations (43).

III.4.4.2. Discussion sur la méthode proposée pour mesurer λ_c.

1. la répartition des densités est symétrique suivant l'épaisseur.

C'est le cas pour la majorité des barreaux en matériaux composites constitués de nappes de fibres décalées les unes par rapport aux autres.

Nous avons alors $J_\rho = 0$

- les amplitudes de vibration étant très faibles, nous négligeons la quantité d'accélération de rotation $K_\rho(d^2\beta/dt^2)$ dans la relation (155e).

-Les déplacements u_1° et u_2° étant d'un ordre de grandeur inférieur à celui des déplacements u_3°, et les modes propres de vibrations longitudinales ayant toujours des fréquences beaucoup plus élevées que celles des modes propres de vibrations transversales de flexion, nous négligeons les termes d'inertie $I_\rho\ (d^2u_1^\circ/dt^2)$ et $I_\rho\ (d^2u_2^\circ/dt^2)$ dans les relations (155a et 155b).

Le système (155) s'écrit alors :

$$N_{,1} = 0 \qquad (a)$$

$$H_{,1} = 0 \qquad (b)$$

$$N\, u^\circ_{3,11} + Q_{,1} - I_\rho \frac{d^2 u_3^\circ}{dt^2} = 0 \qquad (c) \qquad (156)$$

$$\mathcal{R}_{,1} - H + \frac{b^2}{12} I_\rho \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0 \qquad (d)$$

$$M_{,1} - Q = 0 \qquad (e)$$

$$T_{,1} - (K_\rho + \frac{b^2}{12} I_\rho) \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0 \qquad (f)$$

Remarquons que la quantité d'accélération de rotation $\frac{b^2}{12} I_\rho \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ ne doit pas être négligée a priori pour les poutres présentant un couplage entre la flexion et la distorsion dans le plan ($B_{16} \neq 0$).

Même remarque pour la quantité d'accélération de rotation $(K_\rho + \frac{b^2}{12} I_\rho) \frac{d^2\gamma}{dt^2}$ pour les poutres présentant un couplage entre la flexion et la torsion ($D_{16} \neq 0$).

Comme N = Cte = - λ , le système (156) est linéaire.

Nous pouvons donc dire, sans faire les calculs dans tous les cas, que la première fréquence propre s'annule lorsque $\lambda = \lambda_c$. Nous n'avons aucun renseignement sur la forme de la courbe $\lambda = f(\omega^2_{1|\lambda})$, et la quasi linéarité sera vérifiée expérimentalement (Cf Chapitres IV et V).

Dans la pratique :

Ce que nous avons dit en ce qui concerne les imperfections de la poutre et la rigidité de la machine de compression au paragraphe III.4.3. s'applique ici pour tous les types de poutres (avec $J_\rho = 0$), mais avec des réserves en ce qui concerne la poutre de type 6. En effet, dans ce dernier cas, deux phénomènes se superposent :

a) à la suite du couplage entre flexion et compression, la poutre fléchit plus qu'une poutre non couplée. Le phénomène, dû à la rigidité de la machine de compression et présenté ci-dessus, est donc augmenté,

b) dans le mouvement de vibration, il apparaît une composante $\Lambda(t)$ se superposant à la charge, variant dans le temps, proportionnelle à l'amplitude des vibrations et due au couplage flexion-extension. Cet effet se superpose à celui décrit au paragraphe III.4.3., et augmente d'autant les effets non linéaires.

Nous devons donc nous attendre, sur les poutres de type 6, à ce que la caractéristique pratique $\lambda = f(\omega^2_{1|\lambda})$ s'écarte très rapidement de la caractéristique théorique linéaire, au moins pour certaines conditions aux limites. Pour les autres types de poutre, la méthode proposée semble correcte a priori, sous réserve de la quasi linéarité de la courbe théorique $\lambda = f(\omega^2_{1|\lambda})$, qui seule permet une extrapolation pour déterminer λ_c.

2. la répartition des densités n'est pas symétrique suivant l'épaisseur.

Dans ce cas $J_\rho \neq 0$, et il est impossible de négliger a priori les quantités suivantes :

$$J_\rho \frac{d^2\beta}{dt^2}, \quad J_\rho \frac{d^2\gamma}{dt^2}, \quad J_\rho \frac{d^2 u_1^\circ}{dt^2} \quad \text{et} \quad J_\rho \frac{d^2 u_2^\circ}{dt^2}$$

Ces termes sont certainement assez petits car, d'après leur nature, ils semblent être de l'ordre de grandeur des termes d'inertie de rotation que nous avons négligés. Cependant ils pourraient introduire des couplages dynamiques qui excitent certains modes de vibrations, augmentant le phénomène non-linéaire décrit au paragraphe III.4.3.

Le problème n'a jamais été étudié à notre connaissance.

Remarquons notamment que si la quantité $J_\rho\ (d^2\beta/dt^2)$ n'est pas négligeable dans (155a), la charge N n'est plus constante le long de la poutre et dans le temps, et le système (155) n'est plus linéaire: nous n'avons donc plus $\omega_{1|\lambda} = 0$ pour $\lambda = \lambda_c$.

En résumé, nous ne pouvons rien affirmer lorsque $J_\rho \neq 0$.

III.4.5. Conclusions sur la méthode des vibrations.

La méthode proposée pour mesurer λ_c par l'évolution des fréquences propres en fonction de la charge λ est applicable aux poutres composites, sous réserve que :

a) les imperfections ne soient pas trop importantes,

b) la relation $\lambda = f(\omega^2_{1|\lambda})$ soit une courbe quasi linéaire, cette linéarité étant nécessaire pour déterminer λ_c par extrapolation,

c) la répartition des densités soit symétrique suivant l'épaisseur.

Les autres cas sont sujets à caution.

III.5. CONCLUSIONS GENERALES DU CHAPITRE III.

Dans ce chapitre, nous avons souligné la nécessité d'utiliser des méthodes suffisamment fines pour la détermination expérimentale de λ_c.

Nous en avons proposé deux :

- la méthode de Southwell,
- la méthode des vibrations libres de flexion.

Nous avons essayé de déterminer les domaines de validité de ces deux méthodes, par rapport d'une part aux divers types de renforcement, d'autre part aux différents types d'imperfections de la poutre et du système de charge.

Dans les cas litigieux, nous n'avons pas tiré de conclusions, et seule l'expérience peut nous renseigner sur la validité des méthodes employées (Cf Chapitre V).

x
x x
x

CHAPITRE IV

DISPOSITIF EXPERIMENTAL ET DETERMINATION DES CONDITIONS OPTIMALES DE MESURE

Nous présentons dans ce chapitre la mise en application des deux méthodes de mesure de la charge critique λ_c proposées au Chapitre III.

IV.1. DISPOSITIF EXPERIMENTAL.

(Voir Figures A.IV.1 et A.IV.9, annexe A.IV).

IV.1.1. Dispositif de mise en charge.

Il se compose de :

-- une machine de traction-compression INSTRON. Le déplacement axial est imposé (machine dure) et la force de réaction mesurée par la cellule de force

-- un bloc de fixation supérieur et un bloc de fixation inférieur (voir Figures A.IV.2 et A.IV.3) qui permettent de réaliser :

* la liaison échantillon-machine de compression,

* deux types de conditions aux limites. L'encastrement rigide est basé sur le principe d'un petit étau avec cale et vis de serrage (Fig. A.IV.4) et l'appui sur le principe du couteau très dur (acier traité) à arrête vive venant se loger dans un vé, lui-même en acier traité (Fig. A.IV.5),

* les réglages d'alignement et de parallélisme.

-- des embouts emboités sur les deux extrêmités de l'échantillon pour éviter leur endommagement lors des appuis sur couteau (voir Fig. A.IV.6, A.IV.7 et A.IV.10). Deux types d'embouts ont été essayés :

*embouts "mâles" (Fig. A.IV.6); la distance d étant assez importante (1 à 2 mm) le moindre défaut de positionnement ($\hat{\alpha}$) provoque une excentricité de la force de compression. La longueur de l'échantillon n'est, de plus, connue qu'avec une certaine incertitude,

*embouts "femelles" (Fig. A.IV.7); les inconvénients cités ci-dessus sont minimisés. Les embouts "femelles" sont les seuls retenus pour les tests présentés ici.

IV.1.2. Chaîne de mesure.

1°) *Mesures statiques.*

- courbure de l'échantillon : nous mesurons la courbure de préférence à la flèche.

Principe : deux jauges d'extensométrie à trame pelliculaire

(marque HBM, résistance = 120 Ohms) sont branchéesen "demi-pont". La courbure est (Fig. 27) :

$$\text{courbure} = \frac{\varepsilon_1 \left(+\frac{h}{2}\right) - \varepsilon_1 \left(-\frac{h}{2}\right)}{h} \qquad (157)$$

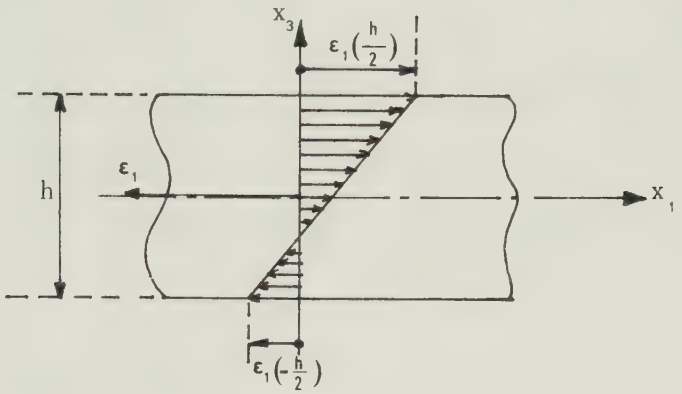

Figure 27

La variation de résistance des jauges,proportionnelle à la différence des déformations $\varepsilon_1 \left(\frac{h}{2}\right) - \varepsilon_1 \left(-\frac{h}{2}\right)$,est mesurée à l'aide d'un pont d'extensométrie (marque SEDEME, type TS 105). La mesure se fait directement sur un voltmètre numérique branché à la sortie du pont TS 105.

- la charge est mesurée par la cellule de force de la machine de compression INSTRON.

2°) *Mesures dynamiques*.

(Cf schéma de principe sur la Figure A.IV.8).

a) grandeur mesurée : fréquence propre de résonance en flexion,

b) principe de la mesure :

. un excitateur électrodynamique (petit haut-parleur dont nous avons enlevé en grande partie la membrane), piloté par un générateur de courant sinusoïdal, induit sur l'échantillon une force sinusoïdale transversale. Un système de suspension pendulaire lesté permet à l'excitateur de suivre le mouvement d'ensemble dû à la déformation statique de la poutre,

. les deux jauges d'extensométrie décrites ci-dessus rendent compte des vibrations de flexion de la poutre en phase et en amplitude,

. un fréquencemètre, branché en parallèle sur le générateur, mesure la fréquence du courant débité par celui-ci (précision : 0,1%),

. un oscilloscope permet de repérer, par la méthode des figures de Lissajou , le déphasage entre la force excitatrice F, proportionnelle au courant qui passe dans l'excitateur, et la déformation en vibration, proportionnelle au signal fourni par le pont d'extensométrie TS 105 (voir Fig. A.IV.8). En effet, deux critères de résonance sont possibles : maximum de l'amplitude des vibrations ou déphasage en quadrature de la force excitatrice F par rapport aux déplacements de flexion. Le deuxième critère est la plus sensible pour les structures faiblement amorties et c'est celui que nous avons utilisé. Le mode opératoire est le suivant : on effectue un balayage en fréquence, et à la résonance apparaît une ellipse sur l'écran de l'oscilloscope ; un réglage fin de la fréquence permet alors d'orienter les axes de l'ellipse parallèlement aux axes X et Y de l'oscilloscope (déphasage de $\pi/2$ exactement).

. cette méthode permet une mesure très précise de la fréquence de résonance (la dispersion entre deux mesures est inférieure à 0,2 %).

IV.2. DETERMINATION DES CONDITIONS EXPERIMENTALES.

Il s'agit de quantifier l'importance de phénomènes secondaires (perturbations dues au montage, effets non linéaires) qui peuvent nuire à la validité de nos mesures.

IV.2.1. Mesures statiques.

La validité de la mesure dépend d'une part de la qualité du cablage des jauges, d'autre part de celle de l'appareillage électronique. En prenant les précautions d'usage, et à l'aide du matériel utilisé, seule la dérive des ponts peut être un obstacle. En fait cette dérive est inférieure à 1 % pendant la durée de la manipulation.

IV.2.2. Mesures dynamiques.

IV.2.2.1. Influence de l'amplitude des vibrations.

La machine de compression INSTRON est une machine dure, c'est-à-sire qu'elle impose un déplacement. La force λ qui charge la poutre est la réaction axiale due à l'élasticité de la poutre et de la machine.

La théorie mentionnée au Chapitre III se limite aux vibrations infiniment petites. En pratique, ces vibrations ont une amplitude finie, ce qui induit une composante axiale Λ (t) due au raccourcissement périodique de la poutre :

$$\lambda = \lambda_o + \Lambda (a,t) , \qquad \Lambda \leqslant 0$$

λ_o : charge statique

λ : charge à l'instant t quand la poutre vibre

a : amplitude des vibrations (en un point donné de la poutre).

Cet effet introduit un terme non linéaire dans l'équation d'équilibre dynamique de la barre (55)(56).

1. Une étude expérimentale a été effectuée sur un barreau d'acier ($0{,}03\ h \leqslant a \leqslant 0{,}3\ h$) pour voir l'influence de l'amplitude a sur les courbes $\omega_1^2 = f(\lambda_0)$ (échantillon n° 2). Les points expérimentaux sont portés sur la Figure A.V.1 (Annexe A.V). Nous constatons que :

   - les courbes $\omega_1^2 = f(\lambda_0)$ sont quasi-linéaires pour une amplitude a donnée,
   - pour $a > 0$, la charge critique extrapolée est plus grande que $\lambda_c\ (a=0)$,
   - pour $a \leqslant 0{,}1\ h$, l'erreur sur la détermination de λ_c est négligeable ($\leqslant 0{,}8$ %) (voir Tableau A.V.II).

2. Une étude théorique effectuée au laboratoire (56) recoupe parfaitement nos résultats expérimentaux (Fig. A.V.1).

3. Conclusions : la sensibilité des ponts d'extensométrie SEDEME TS 105 nous permet de limiter l'amplitude des vibrations de telle sorte que toute correction est superflue.

IV.2.2.2. Influence de l'excitateur de vibrations.

L'équipage mobile de l'excitateur est solidaire de la poutre et agit comme une masse additionnelle qui influe sur les caractéristiques dynamiques du système vibratoire. On peut prendre en compte cette influence par une correction théorique ou de façon expérimentale.

1°) Une approche théorique est faite sur une poutre homogène articulée aux deux extrêmités

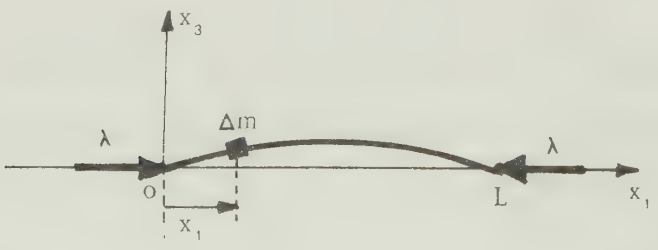

Figure 28

x_1 : position de l'excitateur

Δm : masse de l'équipage mobile de l'excitateur

m : masse de la poutre

$\omega_{1|\lambda}$: première fréquence propre de la poutre seule

$\Omega_{1|\lambda}$: première fréquence propre de la poutre + masse Δm.

Nous avons fait l'hypothèse que la masse Δm est suffisamment petite pour que le mode spatial de vibration ne soit pas affecté par Δm

$$u_3^\circ (x,t) = q(t) \quad X(x) \qquad (158)$$

avec

$$X(x) = \sin \frac{\pi x}{l} \qquad (159)$$

Les équations de Lagrange du système nous permettent de calculer Ω_1

$$\frac{\Omega_{1|\lambda}^2}{\omega_{1|\lambda=0}^2} = \frac{1}{1 + \frac{2\,\Delta m}{m} \sin^2 \frac{\pi x_1}{L}} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_c}\right) \qquad (160)$$

Nous constatons que :

. $\Omega_1 = 0$ pour $\lambda = \lambda_c$ et la courbe $\omega_1^2 = f(\lambda)$ est une droite. Donc la détermination de λ_c n'est pas affectée par Δm. Ceci a été vérifié expérimentalement sur les échantillons composites N° 6 et 8 (Tableau A.V.III). En fait un léger désaccord apparaît, car pendant cette expérience, l'amplitude des vibrations n'a pas été pilotée (cette étude a été faite avant celle concernant l'effet d'amplitude) et pour une puissance donnée du générateur, l'amplitude est d'autant plus grande que l'excitateur se trouve près du milieu de l'échantillon (masse généralisée plus faible).

. L'écart entre Ω_1 et ω_1 est fonction de la position x_1 de Δm (voir Figures A.V.4 et A.V.5). L'accord avec l'expérience est satisfaisant si l'on tient compte de l'effet d'amplitude.

. On a intérêt à mettre l'excitateur le plus près possible d'un

appui, afin de minimiser l'effet de masse.

Le Tableau A.V.VI donne la correction de fréquence à $\lambda = 0$ pour la formule (160) pour les échantillons composites N° 3 à 7 (Cond. Lim. A & B), ces corrections étant assez faibles malgré la masse de l'équipage mobile de l'excitateur ($\Delta m = 1{,}25$ gr). Pour les autres conditions aux limites, des formules analogues à la formule (160) sont facilement calculées (32, partie III). Il s'avère que cette méthode de correction est assez fastidieuse car elle demande beaucoup de calculs pour des corrections assez faibles.

2°) Approche expérimentale : nous utilisons ici une méthode de correction couramment pratiquée pour l'étude des vibrations des structures élastiques faiblement amorties.

a) Principe. Quand une structure vibre suivant un mode propre, elle se comporte comme un oscillateur à un degré de liberté. En un point donné (ici au niveau de l'excitateur), on peut définir :

- une masse généralisée m^*
- une raideur généralisée k^*.

La pulsation propre correspondante est :

$$\omega_{1|\lambda}^2 = \frac{k^*}{m^*} \qquad \text{(poutre seule)} \qquad (161)$$

Lorsque l'excitateur est sur la poutre, la pulsation propre devient Ω_1, et d'après (161)

$$\frac{\Delta\, \omega_{1|\lambda}^2}{\omega_{1|\lambda}^2} = \frac{\Omega_{1|\lambda}^2 - \omega_{1|\lambda}^2}{\omega_{1|\lambda}^2} \neq - \frac{\Delta\, m^*}{m^*} = - \frac{\Delta\, m}{m^*} \qquad (162)$$

Ajoutons encore une masse égale à Δm. Nous mesurons alors une pulsation propre $\Omega'_{1|\lambda}$ telle que :

$$\frac{\Omega'^2_{1|\lambda} - \Omega^2_{1|\lambda}}{\Omega^2_{1|\lambda}} \neq - \frac{\Delta\, m}{m^*} \qquad (163)$$

Donc : $\Omega'^2_{1|\lambda} - \Omega^2_{1|\lambda} = \Omega^2_{1|\lambda} - \omega^2_{1|\lambda} = \Delta\omega^2_{1|\lambda}$ (164)

b) Mode opératoire à λ donné :

* poutre avec excitateur : mesure de $\Omega_{1|\lambda}$
* poutre avec excitateur et masse Δm supplémentaire; mesure de Ω'_1

* d'où $\Delta\omega_1^2 = \Omega_1'^2 - \Omega_1^2$
* on en déduit : $\omega_1^2 = \Omega_1^2 - \Delta\omega_1^2$

Nous constatons que :

- la détermination de λ n'est pas altérée par la masse de l'excitateur, car $\Delta\omega^2_{1|\lambda} \to 0$ quand $\omega_{1|\lambda} \to 0$ ($\lambda = \lambda_c$) (Cf Fig. 29)

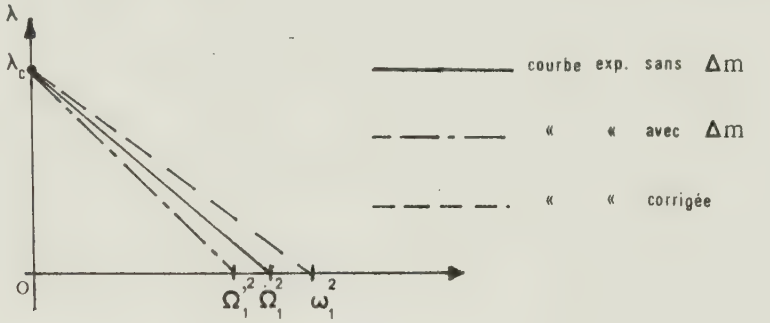

Figure.29

- les deux méthodes sont théoriquement équivalentes si Δm est assez petit
- cette méthode est très rapide.

3°) Conclusions : bien que nous ayions montré que la détermination de λ_c n'est pas altérée par la masse additionnelle de l'excitateur, une correction sera faite systématiquement sur les mesures dynamiques afin de connaître la valeur exacte de $\omega_{1|\lambda=0}$.

Nous avons choisi la deuxième méthode, beaucoup plus rapide et

aussi efficace. Afin de réduire cette correction, nous avons utilisé un excitateur plus petit (Δm = 0,8 gr) pour les mesures sur les matériaux composites.

IV.3. PRECISION DES MESURES DE LA CHARGE CRITIQUE λ_c.

En tenant compte des précautions préconisées au paragraphe IV.2, il s'avère que la précision sur la mesure de λ_c est très bonne. Il est difficile de l'évaluer avec précision mais nous pouvons dire que :

- les mesures statiques donnent λ_c à l'aide du graphe de Southwell, avec une incertitude de 2 % (erreur sur la pente de la droite) dans les cas les plus défavorables,
- les mesures dynamiques, lorsqu'il y a suffisamment de points alignés (au moins la moitié de l'échelle), déterminent une valeur de λ_c à 2 % près.

Soulignons que les précisions données ci-dessus concernent les méthodes de dépouillement des mesures, mais non une estimation de l'erreur entre le résultat expérimental et la valeur théorique de λ_c.

IV.4. CONCLUSIONS DU CHAPITRE IV.

Nous avons étudié l'influence d'effets secondaires et déterminé les précautions à prendre pour effectuer des mesures correctes de λ_c. Nous avons pu ainsi évaluer à 2 % au maximum l'erreur faite sur le dépouillement des mesures des deux méthodes.

x
x x
x

CHAPITRE V

RESULTATS EXPERIMENTAUX

V.I. NATURE DES ECHANTILLONS.

Quatre séries d'échantillons ont été testées :

1ère série : - 2 échantillons (N° 1 et 2) d'acier.

2ème série : composites à matrice résine

- 1 échantillon (N° 3) du type 4 renforcé par des fibres de bore unidirectionnelles parallèles à l'axe de la poutre (θ_k=0°) (voir Fig. I.VI.2, Annexe VI)
- 4 échantillons (N° 4, 5, 6, 7) du type 4, renforcés par des fibres de bore dans les couches externes et des fibres de verre dans les couches internes. Le renforcement est symétrique suivant l'épaisseur et unidirectionnel (θ_k = 0) (voir Fig. A.VI.3).

3ème série : composites à matrice métallique (aluminium)

- 2 échantillons (N° 8, 9) du type 5, à renforcement de fibres de bore bidirectionnel (θ_k = ± 10° et ±20°) comportant 18 couches alternées (voir Fig. A.VI.4).

- 1 échantillon (N° 10) du type 4, renforcé par des fibres de bore unidirectionnelles ($\theta_k = 0°$) (voir Fig. A.VI.2).

4ème série : bilames acier-aluminium (n'ayant pas pu nous procurer des échantillons composites à renforcement du type 6, nous avons utilisé deux échantillons stratifiés comportant une couche d'acier et une couche l'aluminium collées à l'aide d'une colle époxy polymérisable à froid ; les couplages obtenus dans de tels échantillons sont analogues à ceux qui apparaissent dans une poutre composite du type 6).

- 2 échantillons (N° 11 et 12) acier-aluminium du type 6, non symétriques suivant l'épaisseur (voir Fig. A.VI.5).

Le tableau A.VI.I (annexe A.VI) donne en détail les caractéristiques de tous les échantillons.

V.2. RESULTATS.

Pour faciliter l'exposé, nous noterons :

λ_c : charge critique théorique

$\overline{\lambda}_c$: charge critique mesurée par la méthode statique de Southwell

$\tilde{\lambda}_c$: charge critique mesurée par la méthode dynamique des vibrations libres de flexion

$$\Delta\overline{\lambda} = \frac{\overline{\lambda}_c - \lambda_c}{\lambda_c} \text{ : erreur}$$

$$\Delta\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\lambda} - \lambda_c}{\lambda_c} \text{ : erreur.}$$

Les conditions aux limites de type A n'ont pas été testées. En fait, vu la nature des renforcements, la différence avec les conditions aux limites de type B est sans effet sur la valeur de λ_c, sauf pour les échantillons 8 et 9,où la différence entre les deux résultats serait très faible (couplage très faible).

Notons que $f_1 = \frac{\omega_1 | \lambda}{2\pi}$ est la première fréquence propre de la poutre chargée par λ.

V.2.1. Echantillons d'acier.

Voir Tableau A.VI.VI.

V.2.2. Echantillons en matériau composite.

Les résultats sont résumés sous forme de trois tableaux dans l'annexe A.VI :

- Tableau A.VI.VII : conditions aux limites B
- Tableau A.VI.VIII: conditions aux limites C
- Tableau A.VI.IX : conditions aux limites D.

Les charges critiques théoriques ont été calculées à l'aide de la formule (53).

Cette formule n'est qu'approchée pour les échantillons N° 8 et 9 du type 5 (Cond. Lim. B & C), mais le calcul numérique à l'aide

des équations exactes (55)(56), donne un résultat à quelques 10^{-4} près (poutres faiblement couplées).

La charge critique théorique λ_c est calculée avec une précision de $\pm$ 3 % (erreur sur la mesure de D^*, voir Annexe A.III).

Les corrections de cisaillement transversal n'ont été faites que pour les composites à matrice résine (voir Tableau A.VI.X). Pour les autres échantillons, cette correction est absolument négligeable (< 0,1 %).

Nous donnons aussi, à titre d'exemple, dans l'annexe A.VI, les courbes expérimentales obtenues sur l'échantillon N° 6 (Fig. A.VI.11 à A.VI.16), et sur les bilames N° 11 et 12 (Fig. A.VI.17 à A.VI.22). Toutes les courbes sont consignées en détail dans la référence 32 (partie III).

Remarque :

Plusieurs mesures ont été faites sur chaque échantillon et pour chaque type de conditions limites.

Les mesures de $\bar{\lambda}_c$ présentent une dispersion très faible même après démontage et remontage de l'échantillon. Nous donnons donc ici un des résultats choisi au hasard.

Les mesures de $\tilde{\lambda}_c$ peuvent dans certains cas présenter une dispersion un peu plus importante (quelques 10^{-2}), qui est due à des défauts d'alignement et de montage. Nous donnons la mesure de $\tilde{\lambda}_c$ qui correspond à la caractéristique dynamique $\omega_1^2 = f(\lambda)$ présentant le domaine linéaire le plus étendu (Cf paragraphe V.3).

V.3. DISCUSSION DES RESULTATS ET CONCLUSIONS.

V.3.1. Remarques générales.

V.3.1.1. *Ecart entre les valeurs théoriques et les valeurs expérimentales* (Fig. 30).

1°) Mesures statiques :

Comme le domaine d'incertitude des valeurs de λ_c calculées est de $\pm$ 3 % environ, nous constatons que :

$\overline{\lambda}_c$ est toujours dans le domaine d'incertitude de λ_c pour la condition limite B,

$\overline{\lambda}_c$ est un peu inférieur au bas du domaine d'incertitude de λ_c pour la condition limite C,

$\overline{\lambda}_c$ est toujours nettement inférieur (de 5 à 10 %) au bas du domaine d'incertitude pour la condition limite D.

Cependant, tous les résultats, pour chaque condition aux limites, sont dans une bande d'incertitude de l'ordre de $\pm$ 3 %. Il y a donc un effet systématique dû à la présence des encastrements, qui ne semblent pas parfaitement rigides. Ceci est constaté d'une manière identique sur les échantillons d'acier N° 1 et 2 (voir tableau A.VI. 6).

2°) Mesures dynamiques :

L'évolution des valeurs de $\tilde{\lambda}_c$ en fonction de la nature des conditions aux limites apparaît moins nettement sur l'ensemble des résultats.

3°) Cas particuliers:

Les remarques précédentes ne sont pas valables pour les échantillons composites à matrice aluminium (en particulier N° 9 et 10). Or, du fait de la technologie de fabrication (pressage à chaud), l'épaisseur de ces échantillons n'est pas constante (variation de 6 % pour l'échantillon N° 9, 15 % pour le N° 10). Des mesures locales ont montré que D^* varie, entre le centre et l'extrémité, de

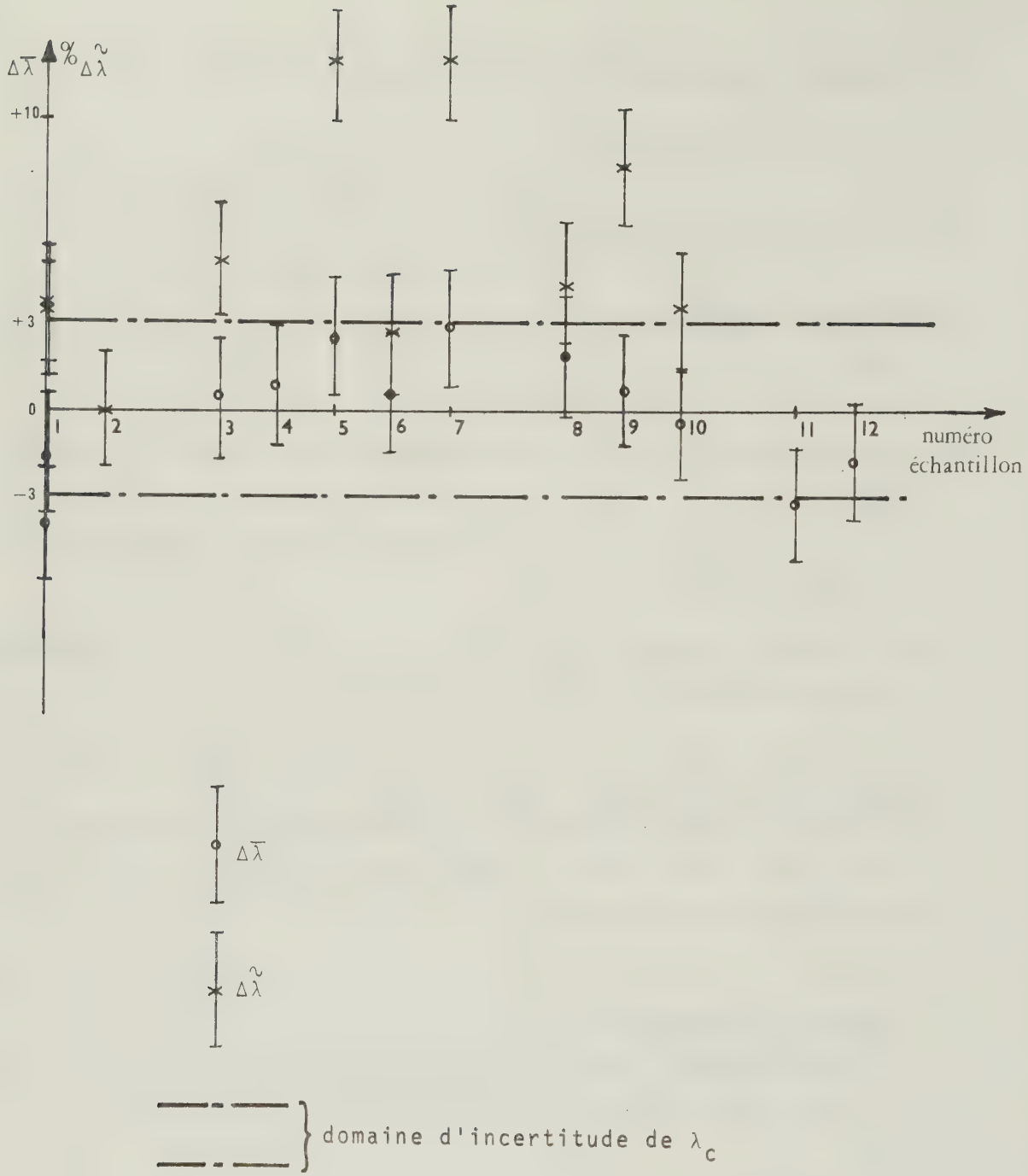

Figure 30a

Comparaison théorie-expérience : conditions aux limites B.

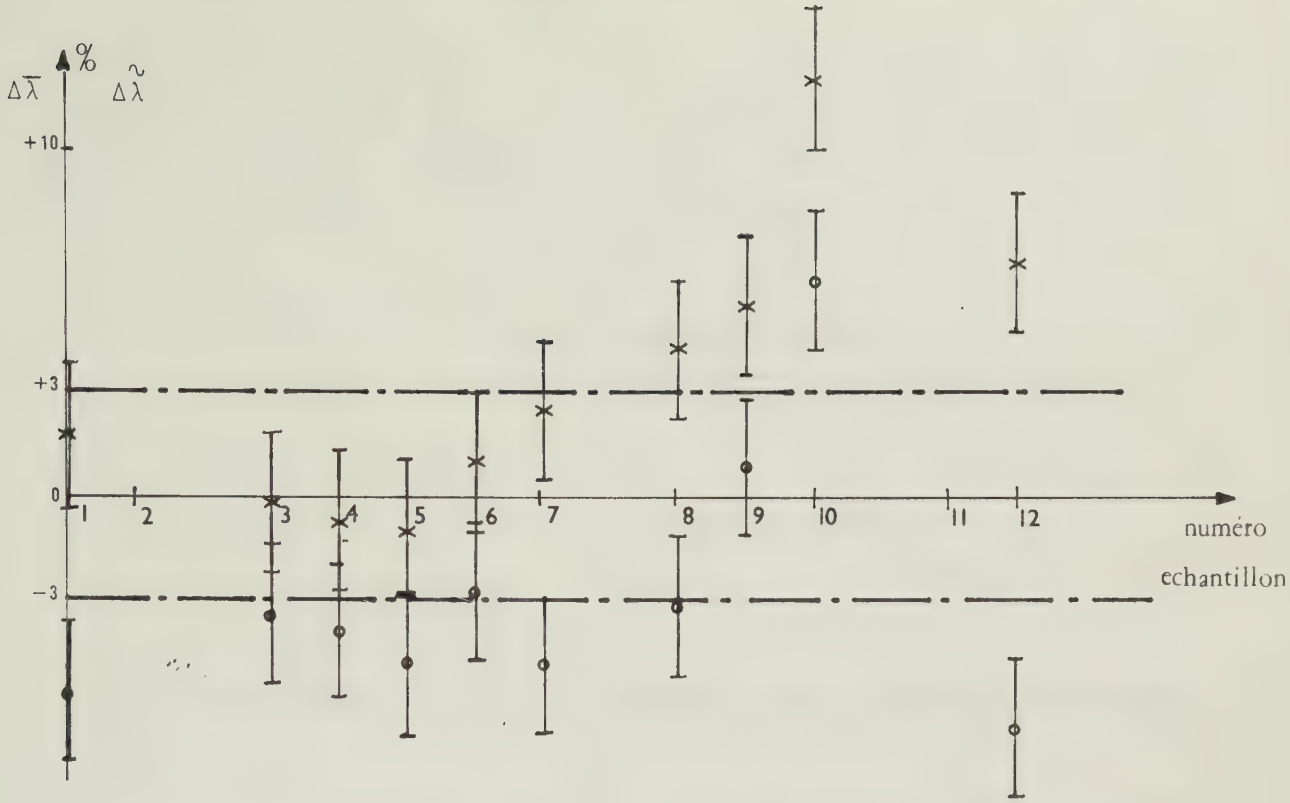

Figure 30b

Comparaison théorie-expérience : conditions aux limites C.

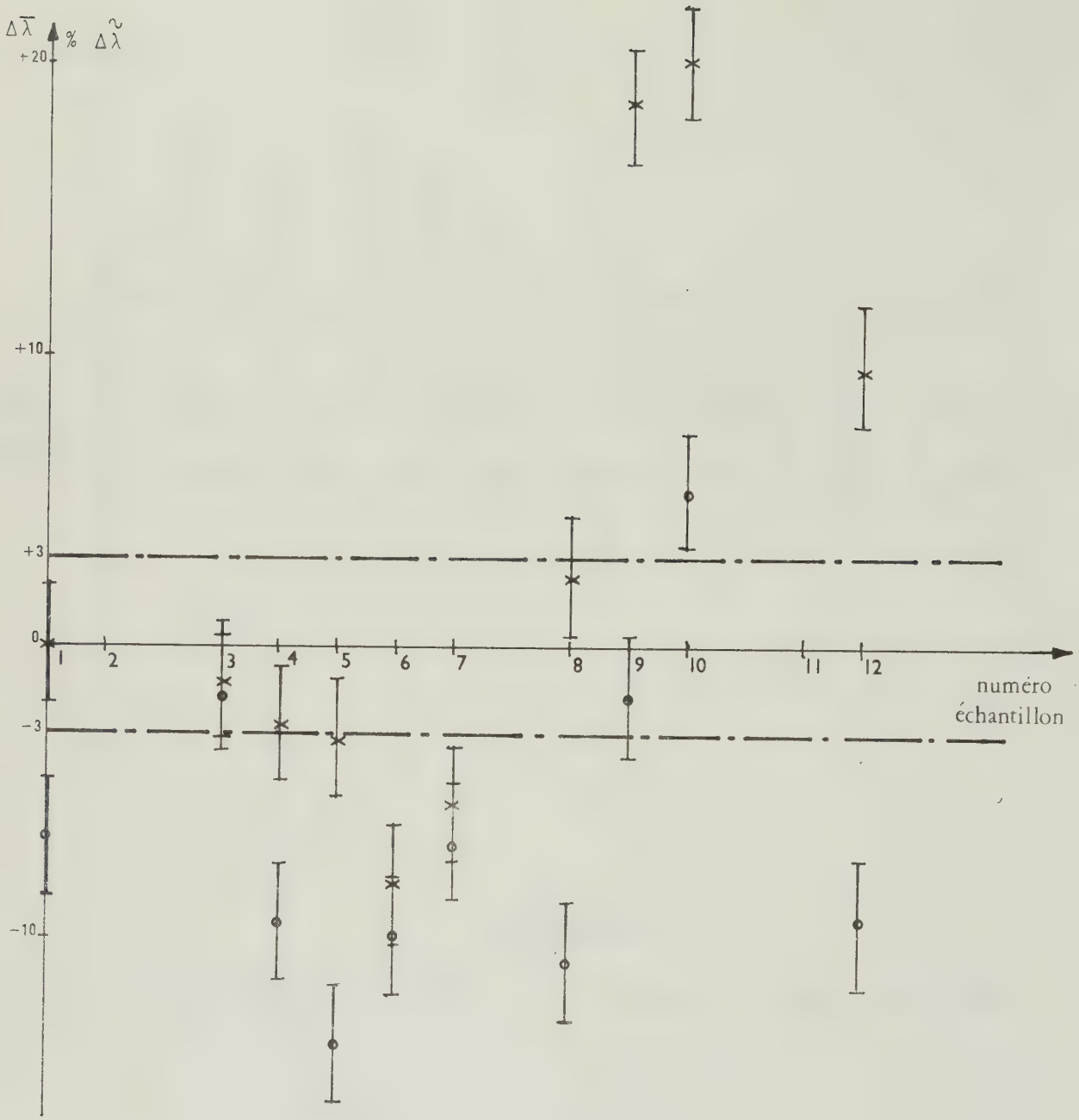

Figure 30c

Comparaison théorie-expérience : conditions aux limites D.

10 % pour l'échantillon N° 9 et de 22 % pour l'échantillon N° 10. Il est donc incorrect de calculer la charge critique λ_c à partir de la valeur de D^* mesurée au centre de l'échantillon. Les désaccords théorie-expériences qui apparaissent dans ce cas proviennent de la grande imprécision sur la valeur de λ_c calculée.

V.3.1.2. Ecart entre les valeurs expérimentales $\overline{\lambda}$ et $\tilde{\lambda}$.

Il n'est pas possible de dégager de l'ensemble des résultats une influence systématique de la nature des conditions aux limites ou de la nature des échantillons sur l'écart entre $\overline{\lambda}$ et $\tilde{\lambda}$. Cependant, nous avons constaté que cet écart est d'autant plus grand que le domaine linéaire de la courbe $\omega_1^2 = f(\lambda)$ est petit. En effet lorsque le domaine linéaire est inférieur à la moitié de la courbe totale, l'écart entre $\overline{\lambda}_c$ et $\tilde{\lambda}_c$ varie de 5 à 20 % de λ_c. Par contre lorsque ce domaine est plus étendu que 75 % de l'ensemble de la courbe dynamique, les écarts entre $\overline{\lambda}_c$ et $\tilde{\lambda}_c$ sont toujours inférieurs à 5 % de λ_c.

L'étendue du domaine linéaire par rapport à l'ensemble de la courbe est liée, comme nous l'avons vu au chapitre III, à l'importance de la flexion avant flambage, c'est-à-dire à la grandeur des imperfections du barreau et du chargement. Donc, lorsque la poutre fléchit trop, le domaine linéaire de la courbe expérimentale $\omega_1 = f(\lambda)$ est assez restreint, et les points expérimentaux peuvent très bien s'écarter de la courbe théorique tout en restant apparemment alignés : le fait que les points expérimentaux soient alignés n'est pas un critère suffisant pour pouvoir affirmer la validité de la méthode dynamique de mesure de λ_c.

Il convient de remarquer cependant que, dans le cas le plus défavorable (échantillon N° 9, cond. lim. D, 30 % du domaine de mesure utilisable par l'extrapolation), $\tilde{\lambda}_c$ n'excède $\overline{\lambda}$ que de 20 %, ce qui, dans certains cas, détermine λ_c avec une précision suffisante pour l'utilisateur.

V.3.1.3. Réalisation des conditions aux limites.

L'ensemble des résultats expérimentaux montre que l'articulation sur couteau a été correctement réalisée. Par contre l'encastrement n'est pas parfaitement rigide. Il est toujours délicat de

réaliser un encastrement parfait. En particulier, la difficulté est accrue ici par :

- la rigidité assez grande des matériaux utilisés (comparable à celle de l'acier qui constitue les encastrements),
- la faible dureté des couches superficielles des échantillons (matrices en résines ou en aluminium), zones qui supportent la quasi totalité de l'effort de réaction,
- la mauvaise définition géométrique de la surface des échantillons qui provoque des défauts d'alignement et de parallélisme.

Une étude quantitative de ces imperfections est très difficile, chaque cas étant un cas particulier. Nous pouvons cependant dire que des valeurs de $\overline{\lambda}$ mesurées sont environ de 10 % inférieures aux valeurs calculées pour deux encastrements rigides (C.L. : D), et de 4 à 5 % inférieures à celles calculées pour un seul encastrement rigide (C.L. : C).

V.3.1.4. Résultats obtenus sur les bilames (échantillons N° 11 et 12).

(voir Fig. A.VI.17 à A.VI.22).

1°) Mesures statiques:

Les résultats obtenus sur les bilames sont analogues à ceux obtenus pour les autres échantillons. La méthode statique basée sur le graphe de Southwell semble donc justifiée pour le bilame qui est une poutre de type 6 assez fortement couplée.

2°) Mesures dynamiques:

La Figure A.VI.18 montre que la méthode dynamique n'est pas valable lorsque les conditions aux limites sont du type B (deux articulations). Le couplage est trop important et la poutre fléchit trop vite dès les faibles valeurs de λ. Les effets non-linéaires dus à la courbure mentionnée au chapitre III sont mis ici en évidence.

Les Figures A.VI.20 et A.VI.22 montrent que par contre il est possible de déterminer une valeur de $\tilde{\lambda}_c$ lorsque les conditions aux limites sont du type C et D. Pour les conditions aux limites D, ceci est conforme à notre théorie (la poutre parfaite reste droite avant flambage) mais nous n'avions pas pu conclure pour les conditions aux limites C. Dans ce dernier cas, il semble que la flexion avant flambage soit suffisamment faible pour qu'une partie de la courbe dynamique $\omega_1^2 = f(\lambda)$ soit linéaire. Cependant, les domaines de linéarité ne dépassent pas 40 % de la pleine échelle, et $\tilde{\lambda}_c$ est supérieur de 13 % (C.L. : C) et 20 % (C.L. : D) à $\bar{\lambda}_c$. Cet écart est conforme à ce que nous avons dit au paragraphe (V.3.1.2) sur la validité de la méthode dynamique.

Ceci nous permet d'autre part de mettre en évidence que les termes de couplage en J_ρ dans les équations d'équilibre dynamique (155) sont bien négligeables, d'autant plus que nous avons ici un cas extrême (densité acier/densité aluminium = 3). En effet, nous constatons que :

- la méthode dynamique est correcte pour les conditions aux limites C et D (compte tenu des réserves faites ci-dessus), donc les termes en J_ρ n'introduisent pas d'effet non linéaire supplémentaire,
- les valeurs de $\omega_1|_{\lambda=0}$ théoriques et expérimentales sont en parfait accord, compte tenu de la comparaison avec les autres échantillons (influence des encastrements).

Malheureusement, il semble que les échantillons du type 6 soient plus sensibles aux imperfections initiales dues aux effets non linéaires qui sont aggravés par la présence du couplage : le domaine linéaire des courbes $\omega_1^2 = f(\lambda)$ n'est pas suffisant pour que $\tilde{\lambda}_c$ soit suffisamment proche de $\bar{\lambda}_c$.

V.3.1.5. Mesure de $\omega_1|_{\lambda=0}$.

Les valeurs théoriques de f_1 sont calculées à partir d'une formule du type :

$$\omega_1\Big|_{\lambda=0} = K \frac{\pi^2}{L^2} \frac{D^*}{\rho b h} \qquad (165)$$

(K dépendant des conditions aux limites).

La formule (165) ne tient compte ni des termes J_ρ lorsqu'ils sont non nuls, ni des couplages entre modes de vibration (torsion, flexion) lorsque certains couplages A_{16}, D_{16}, B_{ij} sont présents. Une étude complète des vibrations des poutres composites aurait été necessaire pour calculer ω_1 de façon plus précise, mais ceci sort du cadre de notre travail. En fait, la formule (165) est exacte pour tous les échantillons sauf pour les N° 8 et 9 (type 5) dont le couplage B_{16} est très faible. Nous admettons donc que dans tous les cas, la formule (165) donne une valeur correcte de $\omega_1\Big|_{\lambda=0}$.

Nous donnons ces résultats, directement obtenus sur les courbes dynamiques, car ils confirment ce qui a été dit ci-dessus au sujet :

- de l'influence des encastrements,
- des imperfections des échantillons n° 9 et 10
- de l'influence des termes d'inertie de couplage J_ρ dans le cas des bilames n° 11 et 12.

V.3.1.6. Influence du cisaillement transversal.

Le tableau A.VI.10 montre que la correction de cisaillement transversal est très faible, même sur les composites à matrice résine (< 2,5 %). Cependant, il est dangereux de généraliser ce résultat. En effet, la correction de cisaillement transversal dépend de l'élancement de la poutre (L/h). Si la poutre n° 7, par exemple, était deux fois plus courte, la correction de cisaillement transversal abaisserait de 10 % environ la valeur de la charge critique.

V.3.2. Conclusions du Chapitre V.

V.3.2.1. Validité des deux méthodes expérimentales.

La méthode statique basée sur le graphe de Southwell donne d'excellents résultats (linéarité du graphe, bon accord avec les

valeurs théoriques), même pour les échantillons N° 8, 9, 11 et 12 où nous n'avons pas pu lui donner une justification théorique.

La méthode dynamique apparaît un peu moins fiable. Néanmoins, nous avons pu dégager de l'ensemble des résultats le point suivant: pour que $\tilde{\lambda}_c$ mesuré par la méthode dynamique soit en bon accord (mieux que 5%) avec $\overline{\lambda}_c$ mesuré par la méthode statique, le domaine linéaire de la courbe $\omega^2_{1|\lambda} = f(\lambda)$ doit s'étendre sur au moins 75% de l'ensemble de l'échelle (mesure entre 0 et 0,75 λ_c). Sinon, l'écart entre $\tilde{\lambda}_c$ et $\overline{\lambda}_c$ peut atteindre 15 à 20 % (domaine linéaire de l'ordre du tiers de l'échelle).

La méthode dynamique semble donc réservée aux échantillons de très bonne qualité.

Soulignons que ceci n'infirme pas la validité théorique de la méthode dynamique pour les échantillons composites, mais des écarts à la théorie,dus aux imperfections,peuvent gêner l'interprétation des mesures.

V.3.2.2. *Validité de la théorie proposée.*

Malgré certaines imperfections du montage, nous constatons un très bon accord entre la théorie et l'expérience sur l'ensemble des résultats. Les deux seules exceptions sont les échantillons N° 9 et 10 dont on ne sait pas calculer la charge critique théorique exacte à la suite d'imperfections de forme. Mais ces deux cas particuliers n'infirment pas la validité de la théorie proposée.

En outre, nous avons vérifié que :

- l'influence du cisaillement transversal est faible pour nos échantillons (même ceux à matrice résine) d'élancement $L/h \geqslant 75$,
- les couplages agissent comme le prévoit la théorie :
  - lorsque le couplage est faible (B_{16} sur les échantillons n° 8 et 9 du type 5), la charge critique est donnée par la formule (53),
  - lorsqu'il est important (B_{11} sur les échantillons n° 11 et 12 du type 6), la rigidité à utiliser pour le calcul de λ_c est bien D^*,

- sur les poutres du type 6 (échantillons N° 11 et 12), la nouvelle définition de λ_c pour les conditions aux limites de type A, B & C que nous avons introduite au chapitre II , correspond bien dans la pratique, à une charge critique, en ce sens que la flexion a tendance à devenir très grande. Ceci se retrouve d'ailleurs dans le fait que le graphe de Southwell est une droite.

x
x x
x

CONCLUSIONS GENERALES

1°) En reprenant les approximations classiques des poutres droites sensibles au cisaillement transversal et subissant des flexions modérées (u_3 de l'ordre de h), nous avons proposé une théorie rendant compte de l'instabilité sous charge axiale d'une poutre stratifiée, modèle approché d'une poutre composite. Nous avons tenu compte des deux caractéristiques originales des matériaux composites, l'anisotropie et l'hétérogénéité, qui sont responsables des couplages physiques apparaissant dans la loi de comportement. Les remarques suivantes s'imposent :

- le problème est régi par un système d'équations linéaires, au degré d'approximation où nous nous sommes placés. Nous retrouvons qu'il n'existe pas de couplage géométrique entre les déformations de flexion et celles d'extension dans une poutre composite. Par contre des couplages physiques apparaissent dans la loi de comportement,
- le phénomène de flambage est le même que pour une poutre homogène et isotrope, si le couplage du type B_{11} est inexistant. Dans tous les cas, nous avons calculé la valeur de la charge critique, mais pour certains types de renforcement et de conditions aux limites, elle n'est pas donnée par les formules classiques de la résistance des matériaux dans lesquelles la rigidité de flexion serait remplacée par la rigidité réduite D^*,
- le couplage du type B_{11} introduit une flexion de la poutre dès le début du chargement, lorsqu'au moins une extrémité est un appui articulé. Mais nous avons démontré que ce couplage est analogue à l'action d'une excentricité de la charge, et nous avons pu définir et calculer une charge critique,
- il a été mis en évidence l'influence de la nature des appuis articulés (rotule ou couteau) sur la valeur de la charge critique. Ceci est important pour la détermination expérimentale des charges critiques.

2°) Nous avons ensuite présenté, sous certaines hypothèses restrictives, une justification théorique de la généralisation de deux méthodes de mesure de la charge critique développées pour les structures classiques: la méthode du graphe de Southwell qui permet d'éliminer l'influence des imperfections, et la méthode des vibrations transverses, qui permet d'obtenir la charge critique à partir de mesures faites à faibles charges.

3°) La mise au point des conditions expérimentales a nécessité une étude fine des perturbations introduites dans les mesures par l'appareillage, qui nous a conduit à donner les conditions optimales d'expérimentation et des formules de correction.

4°) Les résultats expérimentaux confirment d'une façon générale, et souvent avec une très bonne précision,les développements de la théorie : le modèle mathématique des milieux stratifiés anisotropes décrit convenablement le comportement d'une barre composite, et le phénomène d'instabilité apparaît en pratique conforme aux prévisions théoriques, aussi bien qualitativement que quantitativement.

Malgré certaines difficultés liées à la réalisation d'un type d'appui (encastrement rigide), l'ensemble des résultats permet en outre de mettre en évidence :

- la qualité de la méthode statique du graphe de Southwell, qui se révèle précise, fiable et rapide,
- la prudence avec laquelle il faut interpréter les résultats de la méthode dynamique, qui est toujours délicate à mettre en oeuvre dans la pratique, et malheureusement parfois inutilisable.

5°) Enfin, compte tenu du danger qu'il y a d'extrapoler à priori les résultats de la résistance des matériaux classique aux poutres composites, il est nécessaire d'utiliser des méthodes fines de mesure des charges critiques. Ces méthodes, dont la validité a été montrée ici pour les barreaux droits composites, permettent de tenir compte des conditions réelles d'appuis et des imperfections, et pourraient être d'un grand intérêt pour les structures

plus compliquées où les calculs sont très délicats, voire impossibles.

Nous proposons donc une telle démarche qui pourrait donner accès à des résultats expérimentaux fiables et précis, susceptibles d'une part de guider les théoriciens, d'autre part de fournir des renseignements indispensables aux utilisateurs des matériaux composites.

ANNEXE A.1

CALCUL DES RIGIDITES DE CHAQUE COUCHE EN FONCTION DES CONSTANTES ELASTIQUES CLASSIQUES

1°) La loi de Hooke généralisée du matériau orthotrope de la couche n° k écrite dans le repère $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est :

$$\sigma_{\alpha\beta} = C^{(k)}_{\alpha\beta\gamma\delta}\ \varepsilon_{\gamma\delta} \qquad (A1.1)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$$

Il existe un plan de symétrie élastique parallèle au plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Cette loi de comportement s'écrit, dans le repère $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, en notation matricielle, et pour un état de contrainte plan généralisé $(\sigma_{33} = 0)$:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_5 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{(k)}_{11} & Q^{(k)}_{12} & Q^{(k)}_{16} & 0 & 0 \\ Q^{(k)}_{21} & Q^{(k)}_{22} & Q^{(k)}_{26} & 0 & 0 \\ Q^{(k)}_{61} & Q^{(k)}_{62} & Q^{(k)}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q^{(k)}_{55} & Q^{(k)}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & & Q^{(k)}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} \qquad (A1.2)$$

avec les notations (16) du chapitre I.

On a de plus : $Q^{(k)}_{ij} = Q^{(k)}_{ji} \qquad i, j = 1, 2, 6$

Ce sont des coefficients de rigidité qui sont utilisés dans la théorie des plaques minces (22)

Expression des $Q_{ij}^{(k)}$ en fonction des $C^{(k)}$

$$Q_{mn}^{(k)} = C_{mmnn}^{(k)} - \frac{C_{mm33}^{(k)} \, C_{nn33}^{(k)}}{C_{3333}^{(k)}}$$

$$Q_{m6}^{(k)} = Q_{mm12}^{(k)} \qquad (AI.3)$$

$$Q_{55}^{(k)} = C_{1313}^{(k)} \qquad Q_{44}^{(k)} = C_{2323}^{(k)} \qquad Q_{45}^{(k)} = C_{1323}^{(k)}$$

$m, n = 1, 2$

Expression des $R_{ij}^{(k)}$ en fonction des $Q_{ij}^{(k)}$

On les obtient en faisant $\sigma_2 = 0$ dans (AI.2) :

$$R_{ij}^{(k)} = Q_{ij}^{(k)} - \frac{Q_{i2}^{(k)} \, Q_{2j}^{(k)}}{Q_{22}^{(k)}}$$

$$(AI.4)$$

$$R_{55}^{(k)} = Q_{55}^{(k)} \qquad R_{44}^{(k)} = Q_{44}^{(k)} \qquad R_{45}^{(k)} = Q_{45}^{(k)}$$

$i, j = 1, 6.$

2°) Il est intéressant pour l'utilisateur de matériaux composites de connaître les expressions des $R_{ij}^{(k)}$ en fonction des coefficients élastiques classiques, module d'Young, coefficients de Poisson, et modules de cisaillement, la couche étant repérée dans son repère propre $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$.

Dans $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$, la loi de comportement ($\sigma_{33} = 0$) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_6 \\ \bar{\sigma}_5 \\ \bar{\sigma}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} & \bar{Q}_{12}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} & \bar{Q}_{22}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_6 \\ \bar{\varepsilon}_5 \\ \bar{\varepsilon}_4 \end{bmatrix} \qquad (AI.5)$$

Les $\bar{Q}_{ij}$ s'expriment en fonction des coefficients élastiques classiques (Cf. ref. 17 & 22).

$$\bar{Q}_{11}^{(k)} = \frac{E_{11}^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}$$

$$\bar{Q}_{22}^{(k)} = \frac{E_{22}^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}$$

$$\bar{Q}_{12}^{(k)} = \frac{\nu_{21}^{(k)} E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} \qquad (AI.6)$$

$$\bar{Q}_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)}$$

$$\bar{Q}_{55}^{(k)} = G_{13}^{(k)}$$

$$\bar{Q}_{44} = G_{23}^{(k)}$$

On passe des $\bar{Q}$ aux Q par les relations suivantes (Cf ref. 22) où nous omettons l'indice k aux grandeurs Q, $\bar{Q}$ et θ, afin d'alléger l'écriture.

$$Q_{11} = \bar{Q}_{11} \cos^4 \theta + 2 (\bar{Q}_{12}+2\bar{Q}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \bar{Q}_{22} \sin^4 \theta$$

$$Q_{22} = \bar{Q}_{11} \sin^4 \theta + 2 (\bar{Q}_{12}+2\bar{Q}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \bar{Q}_{22} \cos^4 \theta$$

$$Q_{12} = (\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} - 4\bar{Q}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \bar{Q}_{12} (\sin^4 \theta+\cos^4 \theta)$$

$$Q_{66} = (\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} - 2\bar{Q}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \bar{Q}_{66} (\sin^4 \theta+\cos^4 \theta)$$

$$Q_{16} = (\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12} - 2\bar{Q}_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (\bar{Q}_{12}-\bar{Q}_{22}+2\bar{Q}_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$$

$$Q_{26} = (\bar{Q}_{11}-\bar{Q}_{12}-2\bar{Q}_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (\bar{Q}_{12}-\bar{Q}_{22}+2\bar{Q}_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$$

$$Q_{55} = \bar{Q}_{55} \cos^2 \theta + \bar{Q}_{44} \sin^2 \theta$$

$$Q_{44} = \bar{Q}_{44} \cos^2 \theta + \bar{Q}_{55} \sin^2 \theta \qquad (\underline{AI.7})$$

Il est donc facile de remonter des coefficients élastiques pratiques aux rigidités $R_{ij}^{(k)}$.

ANNEXE A.II

PROGRAMME DE CALCUL DE λ_c

(lorsque λ_c n'est pas donné par une formule explicite)

La méthode numérique de résolution des équations (55) et (56) est la méthode itérative de Newton, la première valeur étant la charge critique approchée donnée par la formule (53).

Données

1ère carte : A_{11}, A_{55}, A_{66}, B_{16}, D_{16}, D_{66}, D^*

Format : E10.3, un blanc

2ème carte : L, b

Format : E11.4, un blanc

3ème carte : +1. Conditions aux limites type B
-1. " " " " C

Résultats

P1 = λ_c approchée donnée par (53)

PC = λ_c exacte donnée par (55) et (56)

ER = écart entre PC et P1 en %.

```
// FOR
*LIST ALL
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(2501READER,1403PRINTER)
      INTEGER OUT
      DIMENSION X(100)
      OUT=5
      IN=8
      READ(IN,100)A11,A55,A66,B16,D16,D66,DRED
  100 FORMAT(1X,7(E10.3,1X))
      READ(IN,101)XL,B
  101 FORMAT(1X,2(E11.4,1X))
      READ(IN,102)CL
  102 FORMAT(1X,F3.0)
      EPS=1.E-6
      PI=3.14159
      ZK=(D16*D16/(D66+B*B*A55/12.)+B16*B16*A11/(A66*A66*(XL*XL/(B*B)+A1
     11/A66)))/DRED
      IF(CL-2.)1,4,2
    1 Z1=PI*PI*DRED/(XL*XL)
      P1=Z1/(1.+Z1/A55)
      CIS=1.-(P1/A55)
      I=0
      X(I)=PI
   11 C1=COS(X(I))
      S1=SIN(X(I))
      F1=S1+2.*ZK*(1.-C1)/X(I)
      DF1=C1+2.*ZK*(X(I)*S1-1.+C1)/(X(I)*X(I))
      K=I
      I=I+1
      X(I)=X(K)-F1/DF1
      IF(((X(I)-X(K))/X(K))-EPS)4,4,11
    2 Z1=20.19*DRED/(XL*XL)
      P1=Z1/(1.+Z1/A55)
      CIS=1.-(P1/A55)
      I=0
      X(I)=4.493
   21 C1=COS(X(I))
      S1=SIN(X(I))
      F2=S1-CIS*X(I)*C1+ZK*(2.-2.*C1-X(I)*CIS*S1)/X(I)
      DF2=C1-CIS*(C1-X(I)*S1)+ZK*(2.*X(I)*S1+(2.-X(I)*X(I)*CIS)*C1-2.)/(
     1X(I)*X(I))
      K=I
      I=I+1
      X(I)=X(K)-(F2/DF2)
      IF(((X(I)-X(K))/X(K))-EPS)4,4,21
    4 WRITE(OUT,200)P1
  200 FORMAT(1H ,'P1=',E16.9)
      Y=X(I)
      YC=Y*Y*DRED/(XL*XL)
      PC=YC/(1.+YC/A55)
      ER=100.*(PC-P1)/P1
      WRITE(OUT,201)PC,ER
  201 FORMAT(1H ,'PC=',E16.9,5X,'ER=',F9.5)
      CALL EXIT
      END
```

```
// XEQ

P1= 0.724632264E 02
PC= 0.725610963E 02      ER=  0.13506
```

A N N E X E A.III

MESURE DES RIGIDITES NECESSAIRES POUR LE CALCUL DES CHARGES CRITIQUES.

Pour calculer les charges critiques λ_c, il faut connaître les rigidités A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} (i, j = 1, 2, 6) de la poutre.Nous pouvons :

1°) calculer, à l'aide des formules (28 à 31) et des propriétés élastiques de chaque couche, les coefficients de rigidité. Malheureusement, les propriétés élastiques de chaque couche ne sont connues qu'avec une grande imprécision du fait de la technologie de fabrication actuelle des matériaux composites. Il ne suffit pas en effet de connaître la quantité et les propriétés mécanique et géométrique de chaque constituant, car les conditions de fabrication influent beaucoup sur la qualité du matériau fini. Enfin, les caractéristiques dimensionnelles de la poutre sont assez mal définies. Cette méthode paraît donc dangereuse dans son application systématique.

2°) tester les barreaux finis à l'aide de sollicitations simples et bien définies, et mesurer les rigidités réelles sur le barreau. Nous emploierons cette méthode chaque fois que cela sera possible avec le matériel dont nous disposons au laboratoire. Quand ces tests seront mis en échec, nous estimerons les rigidités recherchées à l'aide des formules (28 à 31).

A.III.1. Description des trois tests.

1) Test I : traction pure.

L'échantillon a ses deux extrêmités encastrées dans les mors rigides d'une machine de traction. On mesure l'allongement ε_1° à l'aide de jauges extensométriques (Fig. A.III.1).

Figure A.III.1

Les conditions aux limites sont, pour $x_1 = 0, L$:

N = donné

$u_2^\circ = 0$

$u_3^\circ = 0$

$\alpha = 0$

$\beta = 0$

$\gamma = 0$

2) Test II: flexion circulaire.

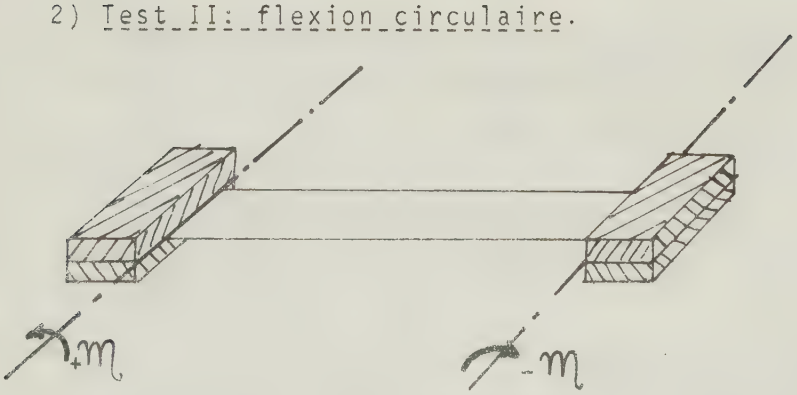

Figure A.III.2

Le dispositif de test est décrit en détail dans la référence (28).

Notons que les mors serrent très peu les extrêmités de l'échantillon et permettent la distorsion dans le plan. On peut mesurer la courbure de flexion $\beta_{,1}$ et l'extension plane ε_1° à l'aide de jauges extensométriques.

Les conditions aux limites sont, pour $x_1 = 0, L$:

$N = 0$
$u_2^\circ = 0$
$u_3^\circ = 0$
$\mathcal{R} = 0$
$M = \mathcal{M}$
$\gamma = 0$

3) Test III : torsion.

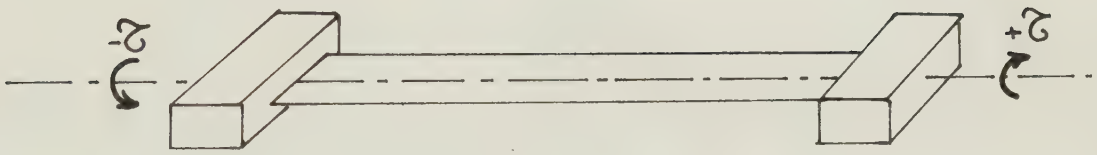

Figure A.III.3.

Les deux extrêmités de la poutre sont encastrées rigidement dans deux mors qui transmettent le couple de torsion $\mathcal{T}$. On mesure l'extension ε_1° à l'aide de jauges extensométriques, et la rotation des deux extrêmités $\gamma(L) - \gamma(0)$.

Les conditions aux limites sont, pour $x_1 = 0, L$:

$N = 0$
$u_2^\circ = 0$
$u_3^\circ = 0$
$\alpha = 0$
$\beta = 0$
$T = \mathcal{T}$

A.III.2. Mesure de certaines rigidités pour les six types de poutres.

On essaie de mesurer uniquement les rigidités nécessaires au calcul de λ_c.

Nota : aucun dispositif existant au laboratoire ne permet de mesurer A_{55}. Nous estimerons donc la valeur de cette rigidité par le calcul).

1) Poutre de type 1.

Rigidités nécessaires : D^*, D_{16}, $D_{66}+\frac{b^2}{12} A_{55}$.

Dans le test II, on a :

$$u_3^\circ = \frac{\mathcal{M}}{2D_{11}} x_1 (L-x_1)$$

D'où, en mesurant la courbure de flexion en un point quelconque :

$$u_{3,11}^\circ = \beta_{,1} = \frac{\mathcal{M}}{D_{11}}$$

D'où la mesure de D_{11}.

Dans le test III, on a : $\mathcal{T} = (D_{66} + \frac{b^2}{12} A_{55}) \gamma_{,1}$

D'où la mesure de $D_{66} + \frac{b^2}{12} A_{55}$.

Aucun dispositif existant au laboratoire ne permet de mesurer D_{16}. Il est donc nécessaire d'estimer cette rigidité par le calcul. On pourra alors déterminer D^* puisque l'on connaît D_{11} et $D_{66}+\frac{b^2}{12} A_{55}$.

2) Poutre de type 2.

Mêmes résultats que pour les poutres du type 1.

3) Poutre de type 3.

Rigidité nécessaire : $D_{11} = D^*$.

A N N E X E A.IV

MONTAGE EXPERIMENTAL

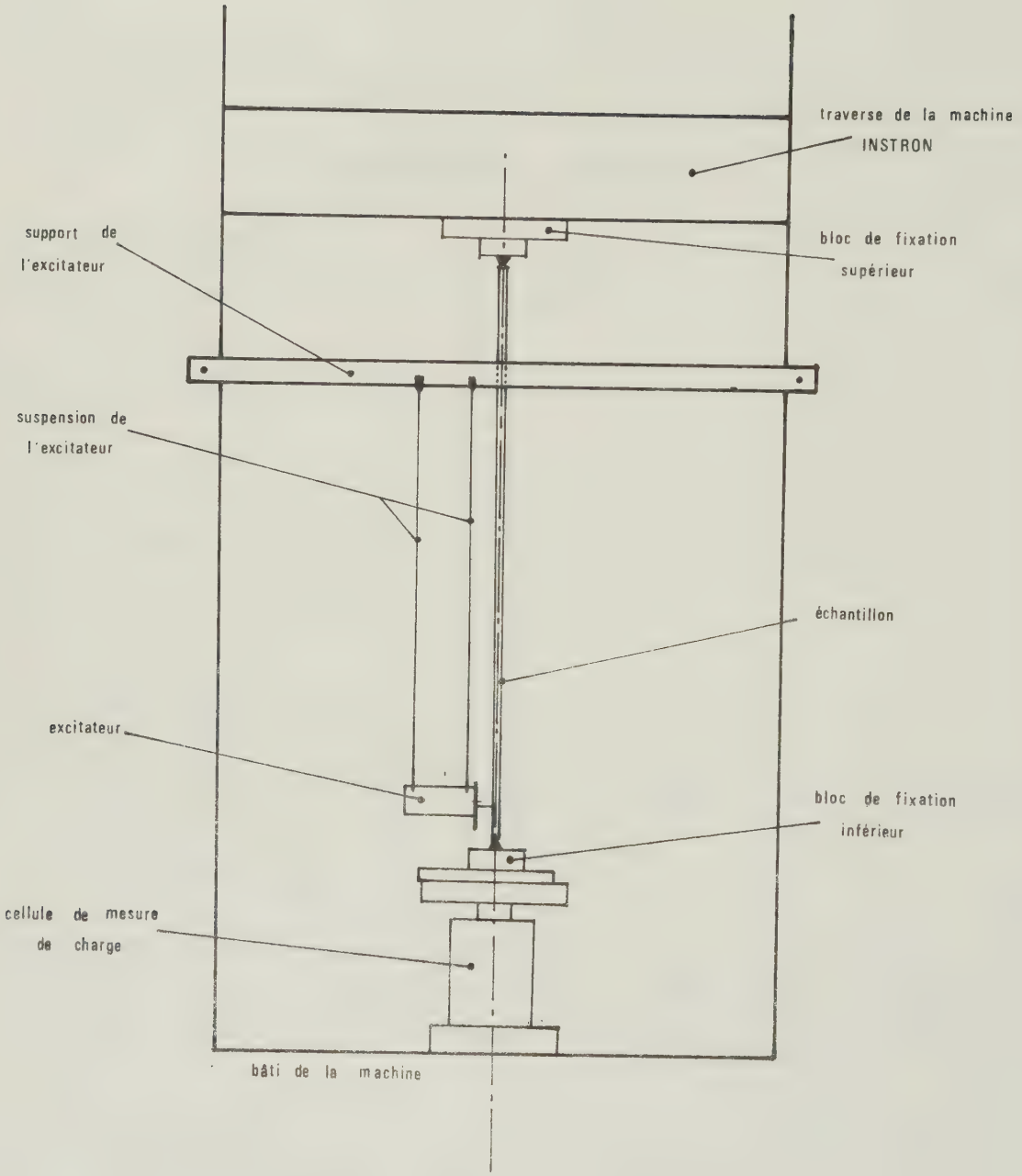

Figure A.IV.1. Dispositif expérimental.

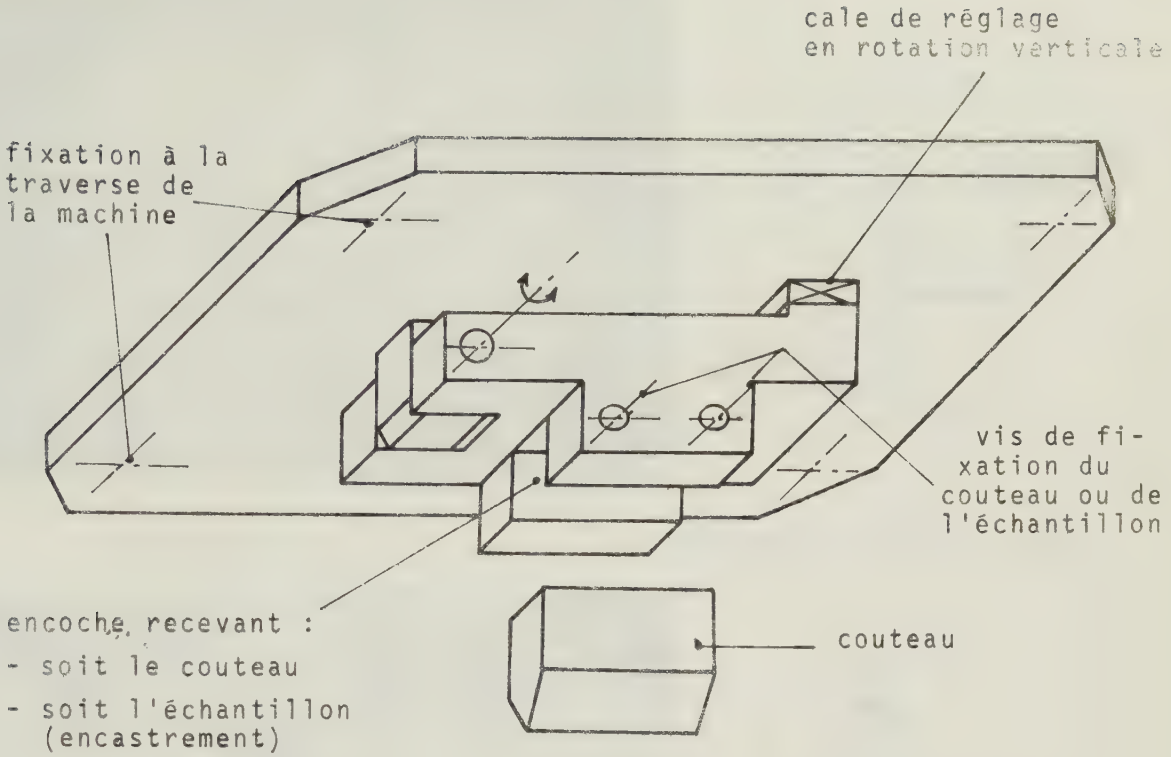

Figure A.IV.2. Bloc de fixation supérieur

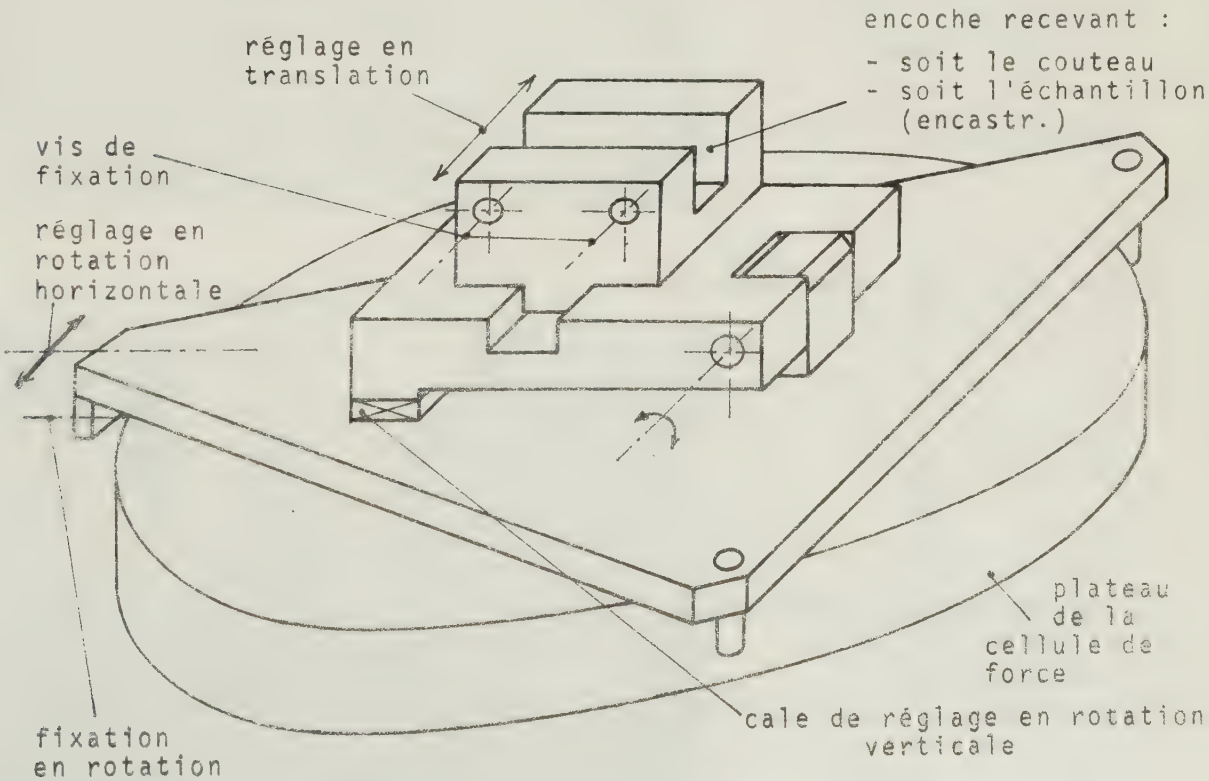

Figure A.IV.3. Bloc de fixation inférieur

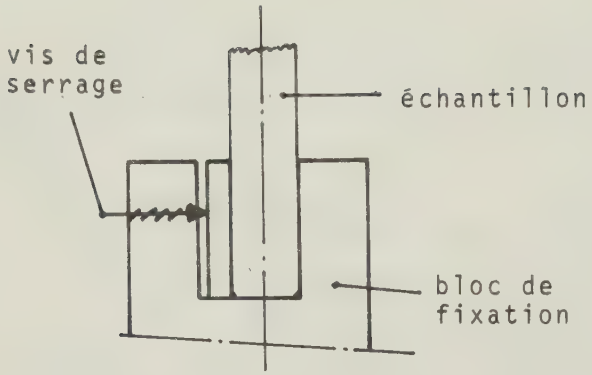

Figure A.IV.4. Encastrement

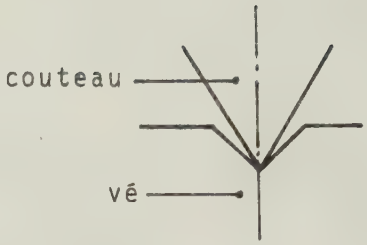

Figure A.IV.5

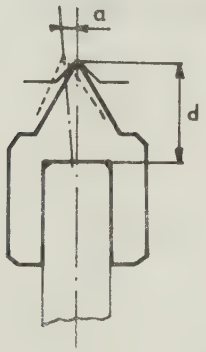

Figure A.IV.6. Embout mâle (EM)

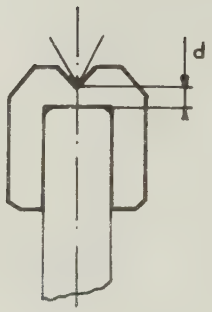

Figure A.IV.7. Embout femelle (EF)

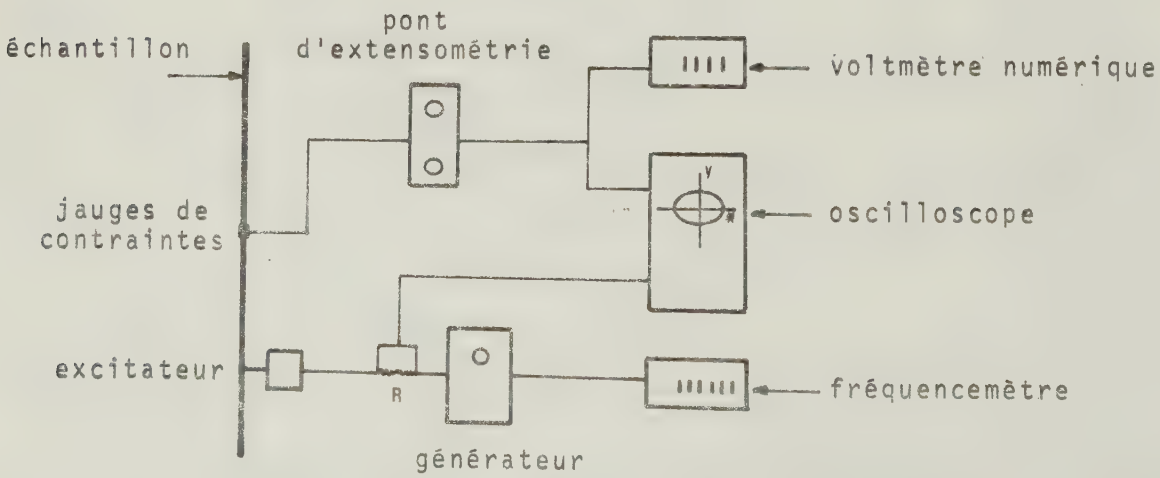

Figure A.IV.8

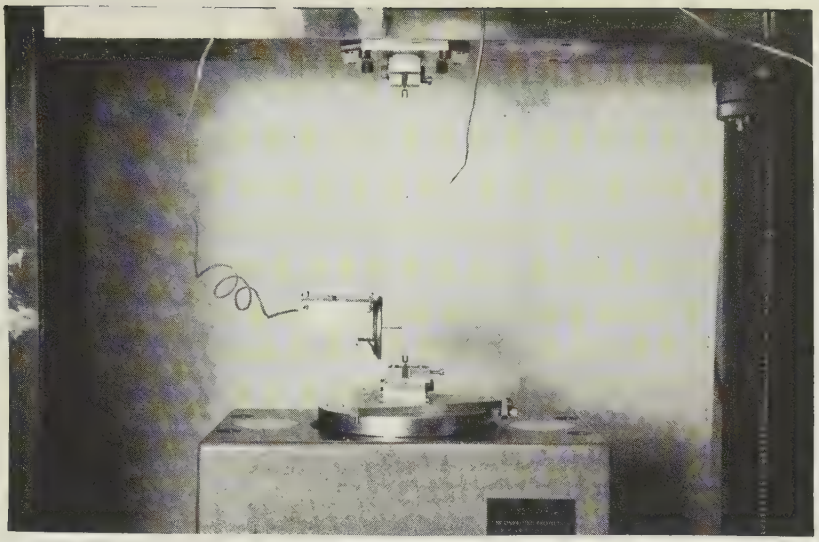

Figure A.IV.9

Dispositif expérimental : vue d'ensemble

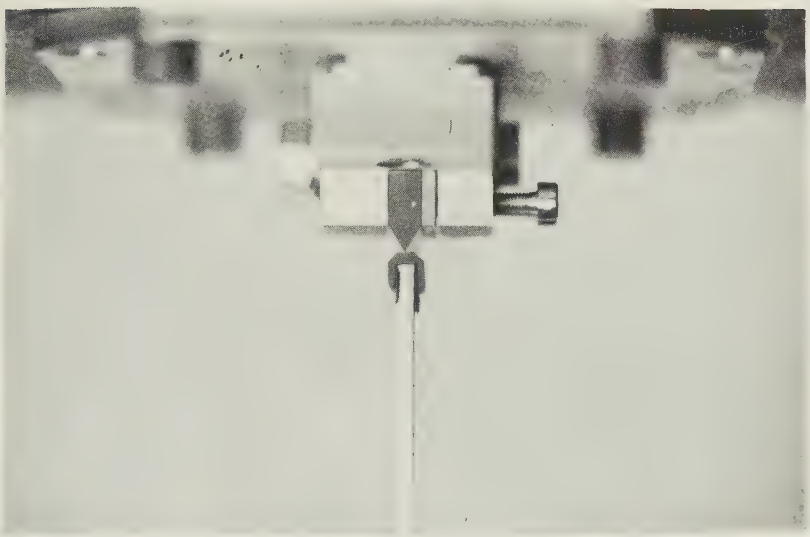

Figure A.IV.10

Bloc de fixation supérieur : détail de l'articulation embout-couteau

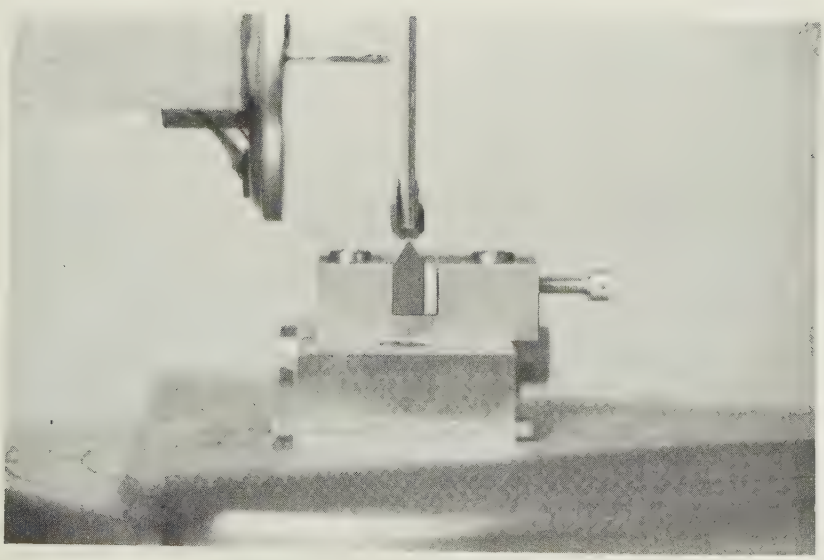

Figure A.IV.11

Bloc de fixation inférieur fixé sur le plateau circulaire de la cellule de mesure de force. En haut à gauche, l'excitateur électrodynamique de vibration

A N N E X E A.V

ETUDE DES CONDITIONS EXPERIMENTALES

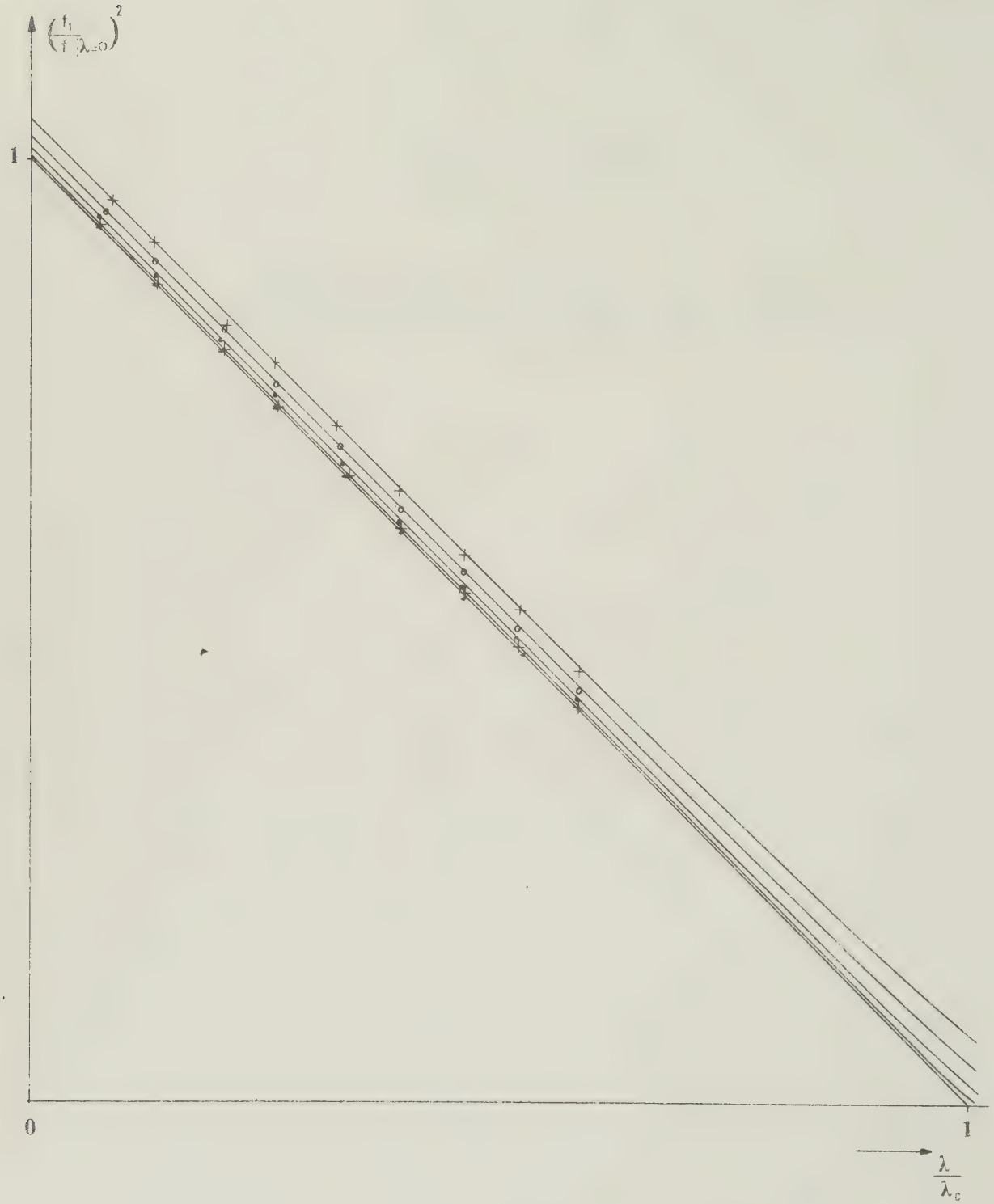

Figure A.V.1. Echantillon N° 2 C.L. B
influence de l'amplitude de vibration de flexion.

TABLEAU A.V.2

Amplitude de vibration	Δf (%)	$\Delta \lambda_c$ (%)
0,1 m.m.	0,04	0,08
0,3 "	0,4	0,8
0,5 "	1,15	2,3
0,7 "	2,4	4,8
0,9 "	4,2	8,4

TABLEAU A.V.3

Variation de la charge critique expérimentale λ_c (influence d'une masse ponctuelle).

Echantillon N°	Position excitateur x_1/L	Charge critique expérimentale $\tilde{\lambda}_c$ (kg)	Charge critique théorique λ_c (kg)
6	0,101	45,7	44,7
	0,152	46,1	
	0,253	46,35	
	0,323	48	
	0,404	47,9	
	0,5	48,3	
8	0,071	71,7	68,8
	0,1065	72	
	0,142	72,5	
	0,31	72,8	
	0,394	73,2	
	0,5	73,3	

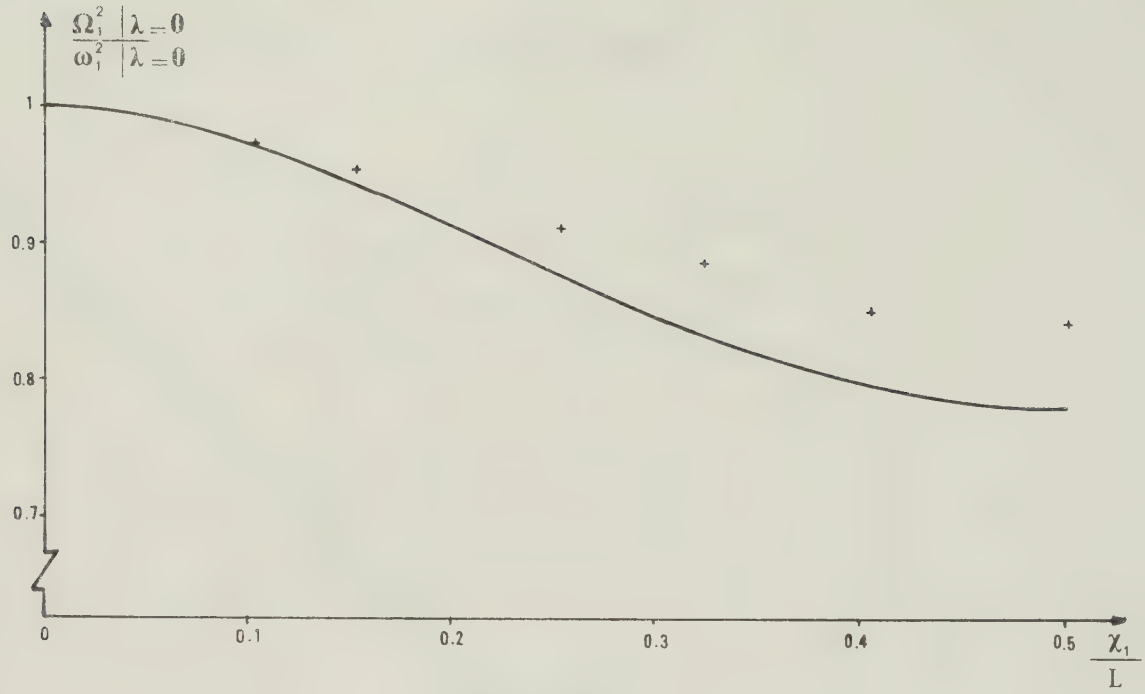

Figure A.V.4. Echantillon N° 6.

Influence d'une masse ponctuelle sur la fréquence propre de vibration de flexion à $\lambda = 0$

——— courbe théorique, +++ valeurs expérimentales.

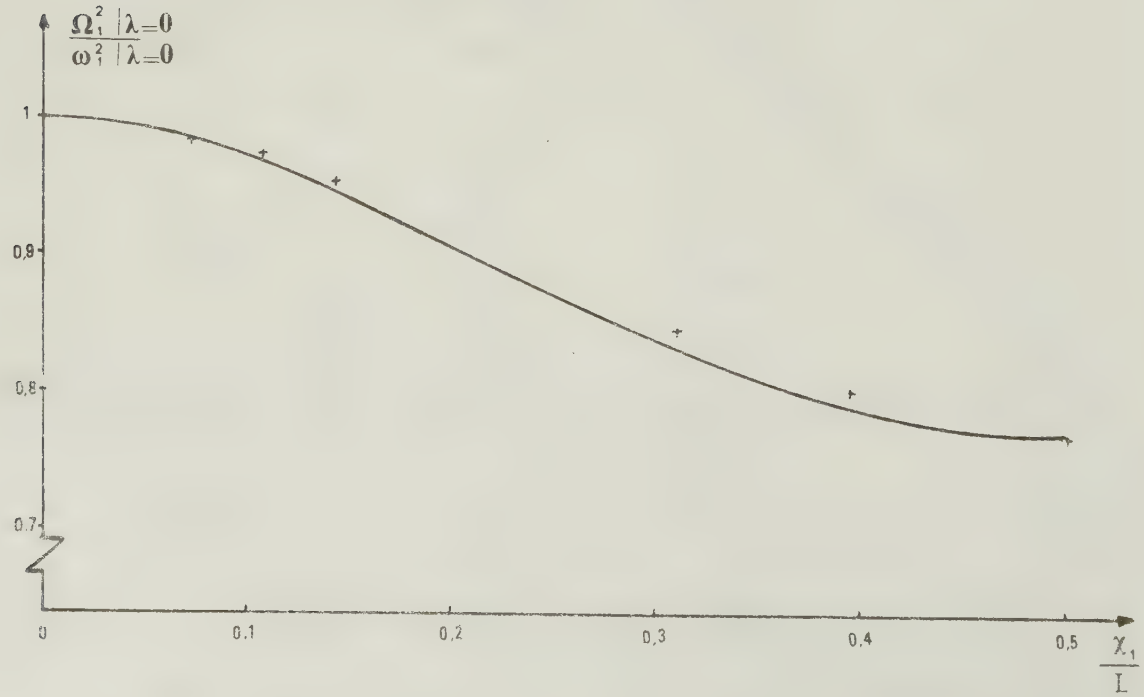

Figure A.V.5. Echantillon N° 8

TABLEAU A.V.6

Correction expérimentale de la fréquence à $\lambda = 0$ par la formule $\omega_1 = \Omega_1 \sqrt{1 + \frac{2\Delta m}{m} \sin^2 \frac{\pi x_1}{L}}$

(conditions aux limites A ou B).

Echantillon	Fréquence expérimentale non corrigée Ω_1	Fréquence expérimentale corrigée f_1	Fréquence théorique	Position de l'excitateur x_1/L
3	243	244,3	244	0,0535
4	183		188	
5	237	238	238	0,052
6	245	248,3	248	0,1
7	266	275,5	275	0,16
8	355	357,6	356	0,071
9	265	266	264	0,0548

A N N E X E A.VI

RESULTATS EXPERIMENTAUX

TABLEAU A.VI.1. Caractéristiques des échantillons

Ech. N°	Nature de la matrice	Type renforcement	Dimensions h x b x L (mm)	Module d'Young en flexion $E = \frac{12D^*}{h^3}$ (kg/mm^2)	Masse volumique $\frac{I}{b}\rho$ (gr/cm^3)	Masse M (gr)
1	acier étiré		3,015 x 13,15 x 299	$2,14.10^4$	7,8	
2	acier étiré		3 x 15,95 x 496	$2,14.10^4$	7,8	
3	résine	12 couches de fibres de bore	1,78 x 9,9 x184,5	$2,14.10^4$	1,875	6,09
4	résine	sandwich : 1 c. fibre bore 8 c. fibre verre 1 c. fibre bore	2,23 x 10,35 x 193	$0,89.10^4$	1,75	7,79
5	résine	sandwich : 2 c. fibre bore 7 c. fibre verre 2 c fibre bore	2,23 x 10,4 x 191	$1,373.10^4$	1,76	7,78
6	résine	sandwich : 3 c. fibre bore 6 c. fibre verre 3 c. fibre bore	2,23 x 10,35 x 198	$1,873.10^4$	1,9	8,66

Tableau A.VI.1 (suite)

7	résine	sandwich : 7 c. fibre bore 5 c. fibre verre 4 c. fibre bore	2,26 x 10,3 x 192	$1,943.10^4$	1,88	8,39
8	aluminium	18 couches fibres bore alternées à $\pm$ 20°	2,15 x 10,05 x 151	$2,01.10^4$	2,56	8,335
9	aluminium	18 couches fibres bore alternées à $\pm$ 10°	2,01 x 10,12 x 180,5	$2,51.10^4$	2,66	9,75
10	aluminium	12 couches fibres bore 0°	1,25 x 15,25 x 203	$1,952.10^4$	2,80	10,64
11	bilame	acier inox-AG 5 h inox = 1,22 mm h AG 5 = 1,25 mm	2,47 x 14 x 249	inox $1,885.10^4$ AG 5 $0,73.10^4$ $D^* = 19,6.10^4 kg.mm^2$		45,55
12	bilame	acier inox-AG 5 h inox = 1,20 mm h AG 5 = 1,22 mm	2,42 x 15,3 x 219,5	inox $1,923.10^4$ AG 5 $0,704.10^4$ $D^* = 19,9.10^4 kg.mm^2$		42,80

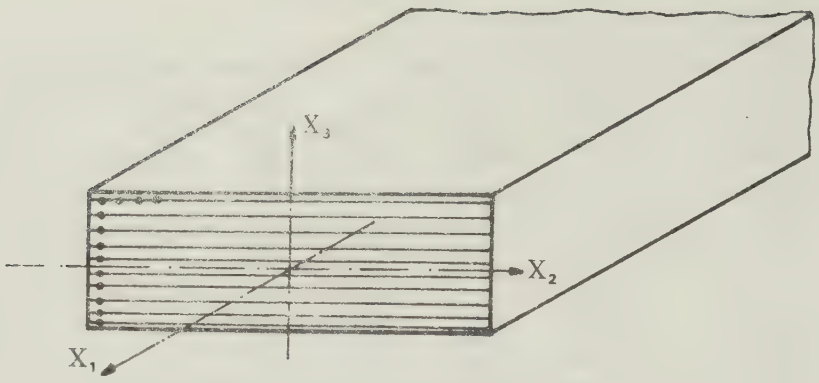

Figure A.VI.2. Echantillons N° 3 et 10

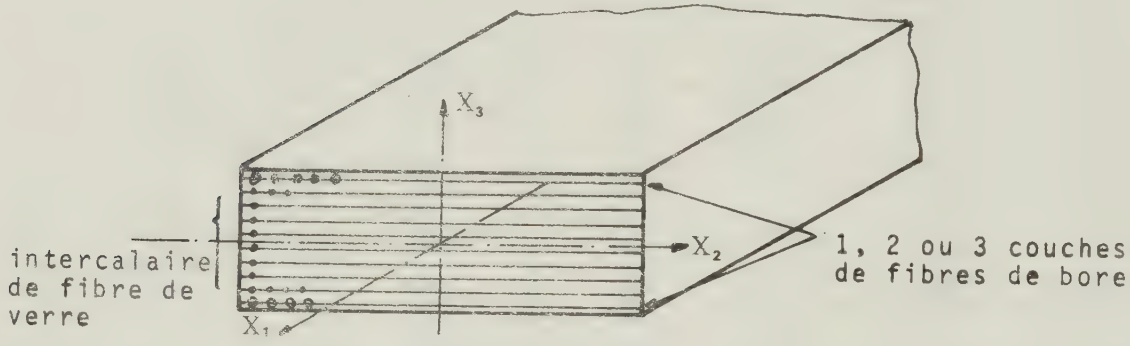

Figure A.VI.3. Echantillons N° 4, 5, 6, 7.

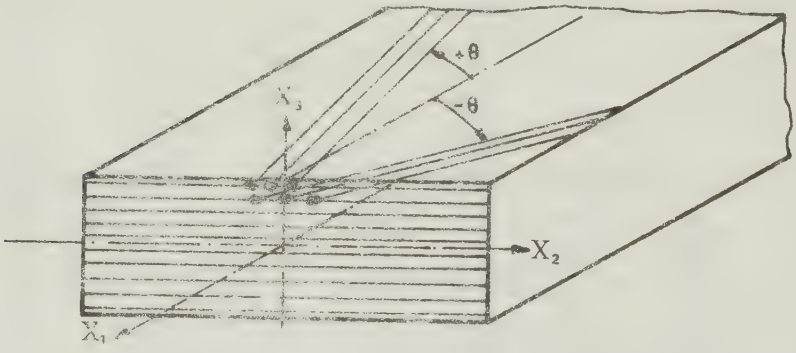

Figure A.VI.4. Echantillons N° 8 et 9.

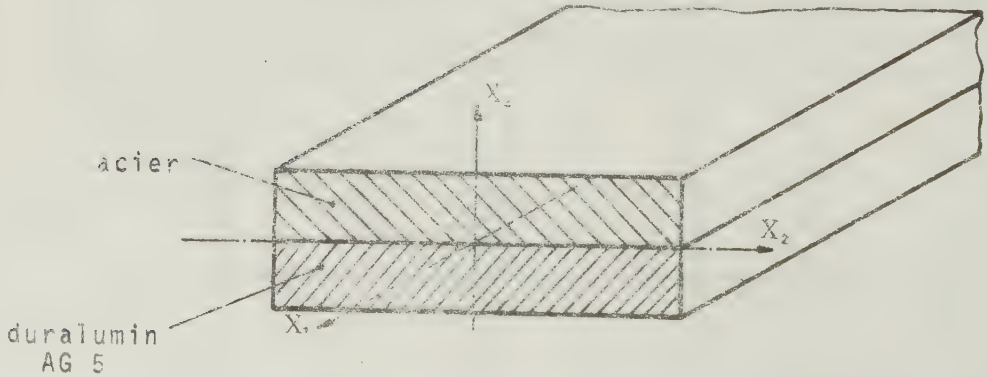

Figure A.VI.5. Echantillons N° 11 et 12.

TABLEAU A.VI.6. Résultats expérimentaux obtenus sur les échantillons N° 1 et 2

Ech. N°	Conditions aux extrêmité	L (mm)	Charge critique théorique λ_c (kgf)	Mesures experimentales				Fréquence expérimentale à $\lambda = 0$		Fréquence théorique à $\lambda = 0$
				Statique		vibration				
				$\overline{\lambda}_c$(kgf)	$\Delta\overline{\lambda}_c$(%)	$\tilde{\lambda}_c$	$\Delta\tilde{\lambda}_c$	f_1(Hz)	Δf(%)	f_1 (Hz)
1	B *	301	70	67,25	- 4	72,2	+ 3,3	78	- 0,25	78,2
	B **	299	71	69,8	- 1,7	73,5	+ 3,6	79,6	+ 0,38	79,3
	C	287	157	148	- 5,7	160	+ 1,9	130,2	- 3,2	134,5
	D	278	328	306	- 6,7	328	0	196	- 6,2	209
2	B *	498,5	30,6			30,6	0	28	- 0,35	28,1

* embouts femelles

** embouts mâles

TABLEAU A.VI.7. Résultats expérimentaux : échantillons composites
Conditions aux extrêmités : type B.

Echantillon	L (mm)	charge critique théorique	Mesures expérimentales				Fréquence expérimentale à $\lambda = 0$		Fréquence théorique à $\lambda = 0$
			Statique		vibration				
		λ_c (kgf)	$\overline{\lambda}_c$(kgf)	$\Delta\overline{\lambda}_c$(%)	$\tilde{\lambda}_c$	$\Delta\tilde{\lambda}_c$	f_1(Hz)	Δf_1(%)	f_1 (Hz)
3	187	28	28,2	+ 0,7	29,45	+ 5,2	246	+ 0,8	244
4	195	22,2	22,5	+ 0,9			183	- 2,6	188
5	193	34,8	35,7	+ 2,5	39	+12	239,7	+ 0,71	238
6	200	44,5	44,75	+ 0,6	45,7	+ 2,7	247	- 0,4	248
7	194	50,1	51,5	+ 2,8	56,3	+12,1	278	+ 1,1	275
8	155	68,8	70	+ 1,8	71,7	+ 4,3	357	+ 0,28	356
9	182,5	51,5	51,8	+ 0,58	55,7	+ 8,15	265	+ 0,38	264
10	205	11,36	11,32	- 0,3	11,75	+ 3,3	114	+ 3,1	111,5
11	251	30,7	29,7	- 3,3			85,5	+ 5,6	81
12	221,5	40,1	39,4	- 1,8					101,5

TABLEAU A.VI.8. Résultats expérimentaux : échantillons composites
Conditions aux extrêmités : type C.

Echantillon	L (mm)	charge critique théorique	Mesures expérimentales Statique		vibration		Fréquence expérimentale à λ =0		Fréquence théorique à λ = 0
		λ_c (kgf)	$\overline{\lambda}_c$(kgf)	$\Delta\overline{\lambda}_c$(%)	$\tilde{\lambda}_c$	$\Delta\tilde{\lambda}_c$	f_1(Hz)	Δf_1(%)	f_1 (Hz)
3	178	62,5	60,25	- 3,6	62,4	- 0,2	406	- 3,3	420
4	186	49,2	47,3	- 3,9	48,75	- 0,9	308	- 4,35	322
5	184	77,8	74	- 4,9	77	- 1	387	- 4,9	407
6	191	97,8	95	- 2,9	98,8	+ 1	403	- 5	424
7	185	111,6	106	- 5	114	+ 2,5	442	- 6	470
8	146	158	153	- 3,15	165	+ 4,4	619	- 2,7	626
9	173,5	116	117	+ 0,86	122,5	+ 5,6	444	- 2,2	454
10	196	25,3	26,9	+ 6,3	28,4	+12,2	203	+ 6,8	190
12	212,5	88,5	82,5	- 6,8	94,5	+ 6,8	167,5	- 2,3	171,5

TABLEAU A.VI.9. Résultats expérimentaux : échantillons composites

Conditions aux extrémités : type D.

échantillon	L (mm)	charge critique théorique	Mesures expérimentales				Fréquence expérimentale à $\lambda = 0$		Fréquence théorique à $\lambda = 0$
			statique		vibration				
		λ_c (kgf)	$\bar{\lambda}_c$ (kgf)	$\Delta\bar{\lambda}_c$ (%)	$\tilde{\lambda}_c$	$\Delta\tilde{\lambda}_c$	f_1 (Hz)	Δf_1 (%)	f_1 (Hz)
3	169	135,2	133	- 1,6	134	- 1,1	624	- 8,2	680
4	177	105,9	96	- 9,5	103	- 2,7	472	- 8,9	518
5	175	166,9	144	- 13,5	161,5	- 3,2	592	- 9,6	655
6	182	209,1	188,5	- 9,9	192,5	- 8	604	-11,3	681
7	178	238,8	222,5	- 6,8	226	- 5,4	680	-10,2	757
8	137	398	314	- 10,8	360	+ 2,3	990	- 4,4	1035
9	181,5	253	249	- 1,6	310	+18,5	712	- 3,3	736
10	187	54,7	57,6	+ 5,3	65,7	+20	328	+ 8	304
12	286,5	190	172,5	- 9,2	208	+ 9,5	257	- 5,7	272,5

TABLEAU A.VI.10. Influence du cisaillement transversal.

Echantillon	Conditions aux limites : B			Conditions aux limites : C			Conditions aux limites : D		
	λ_c(kgf) non corrigé	λ_c(kgf) corrigé	écart (%)	λ_c(kgf) non corrigé	λ_c(kgf) corrigé	écart (%)	λ_c(kgf) non corrigé	λ_c(kgf) corrigé	écart (%)
3	28,1	28	- 0,4	63	62,5	-0,81	137,5	135,2	- 1,67
4	22,3	22,2	- 0,4	49,5	49,2	-0,6	107,2	105,9	- 1,21
5	35	34,8	- 0,45	78,5	77,8	-0,9	170	166,9	- 1,82
6	44,7	44,5	- 0,57	98,8	97,8	-1,01	214	209,1	- 2,29
7	50,5	50,1	- 0,63	113	11,6	-1,19	245	238,8	- 2,55

Charge critique non corrigée : $\lambda_c = \frac{D^* K}{L^2}$ $\quad (K = \pi^2;\ 20,19\ ;\ 4\pi^2)$

Charge critique corrigée : $\lambda_c = \frac{D^* K}{L^2} \frac{1}{1 + \frac{D^* K}{L^2 A_{55}}}$

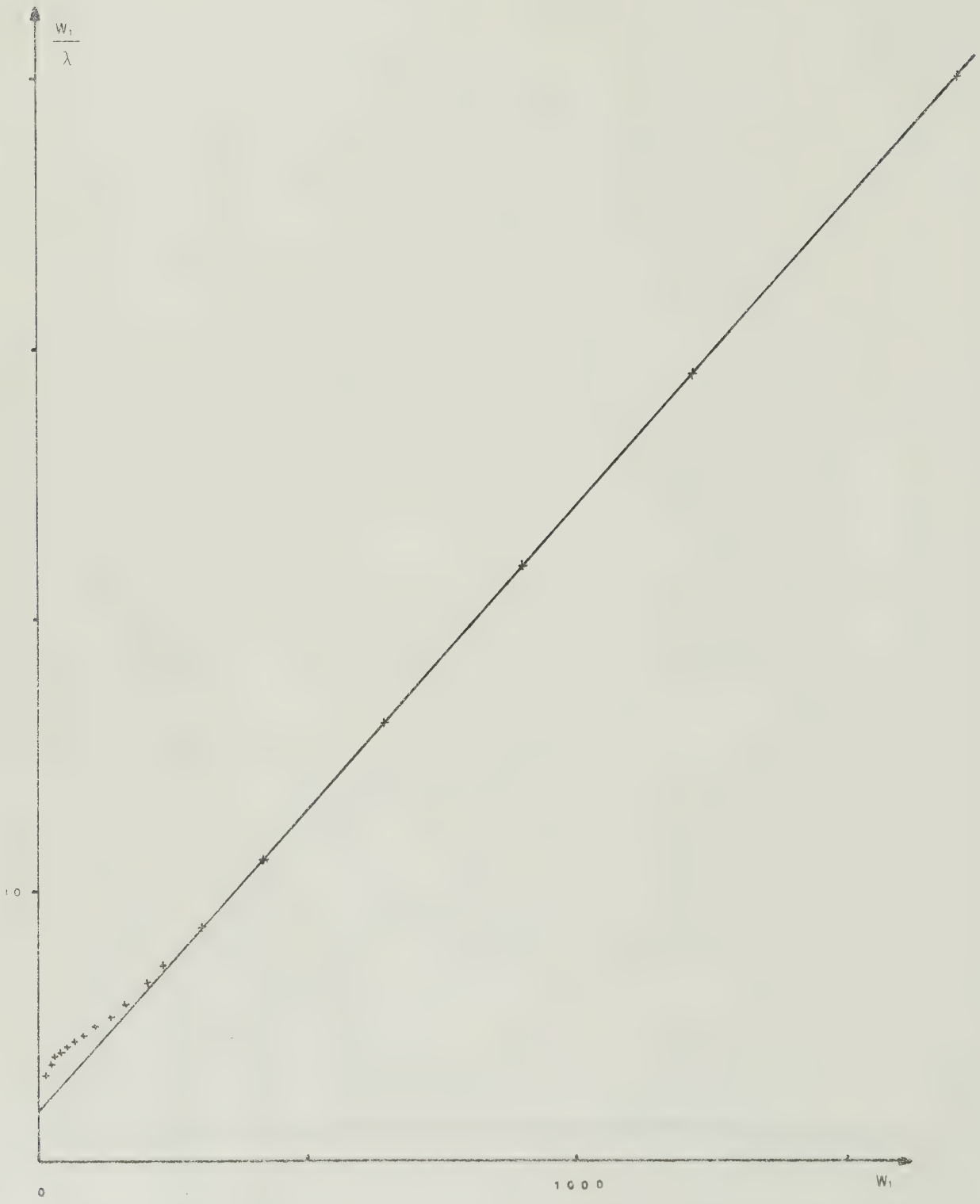

FIGURE A.VI.11. Echantillon n° 6, C.L. B, graphe de Southwell.

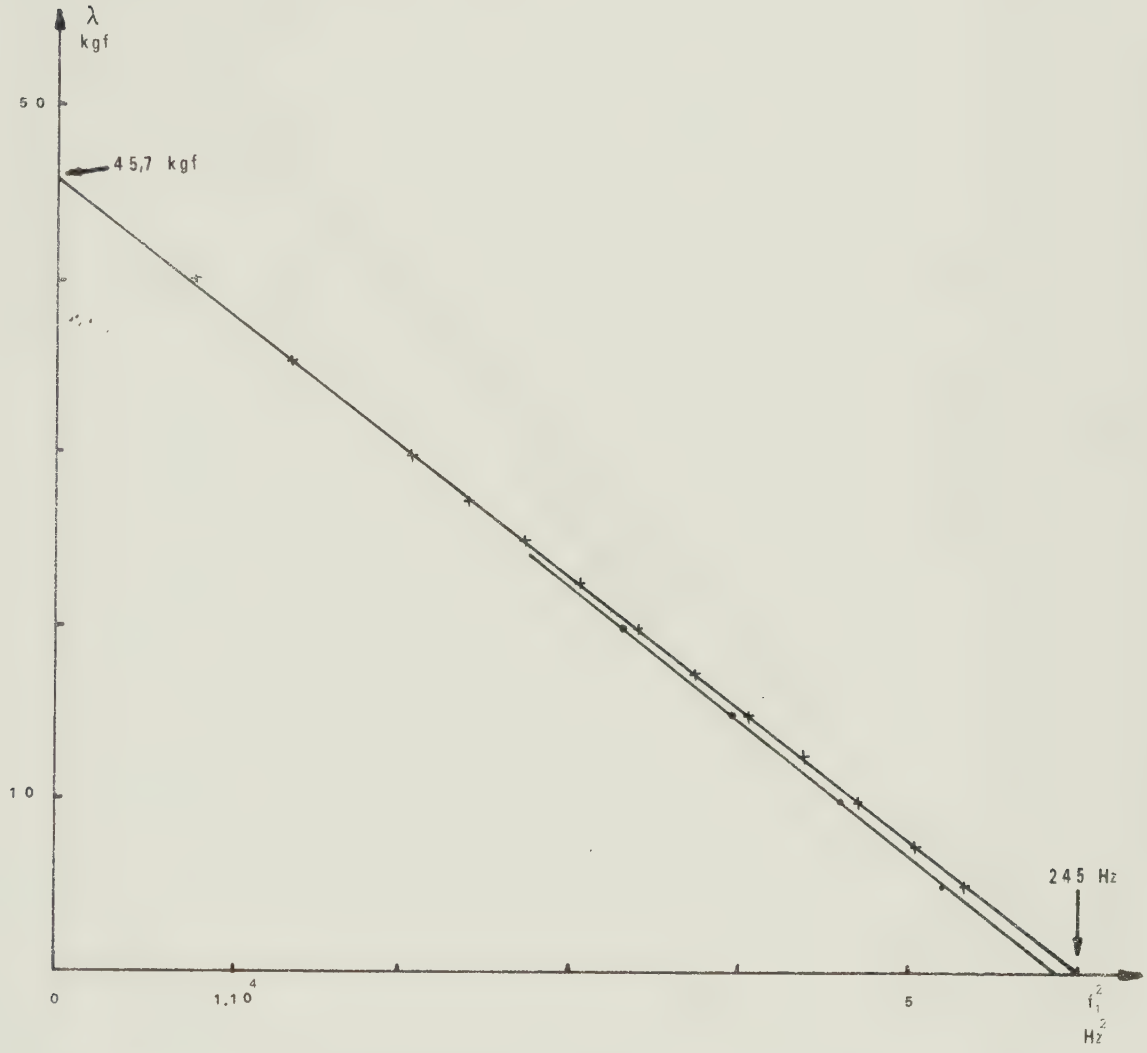

FIGURE A.VI.12. Echantillon N° 6, C.L. B, mesures dynamiques.

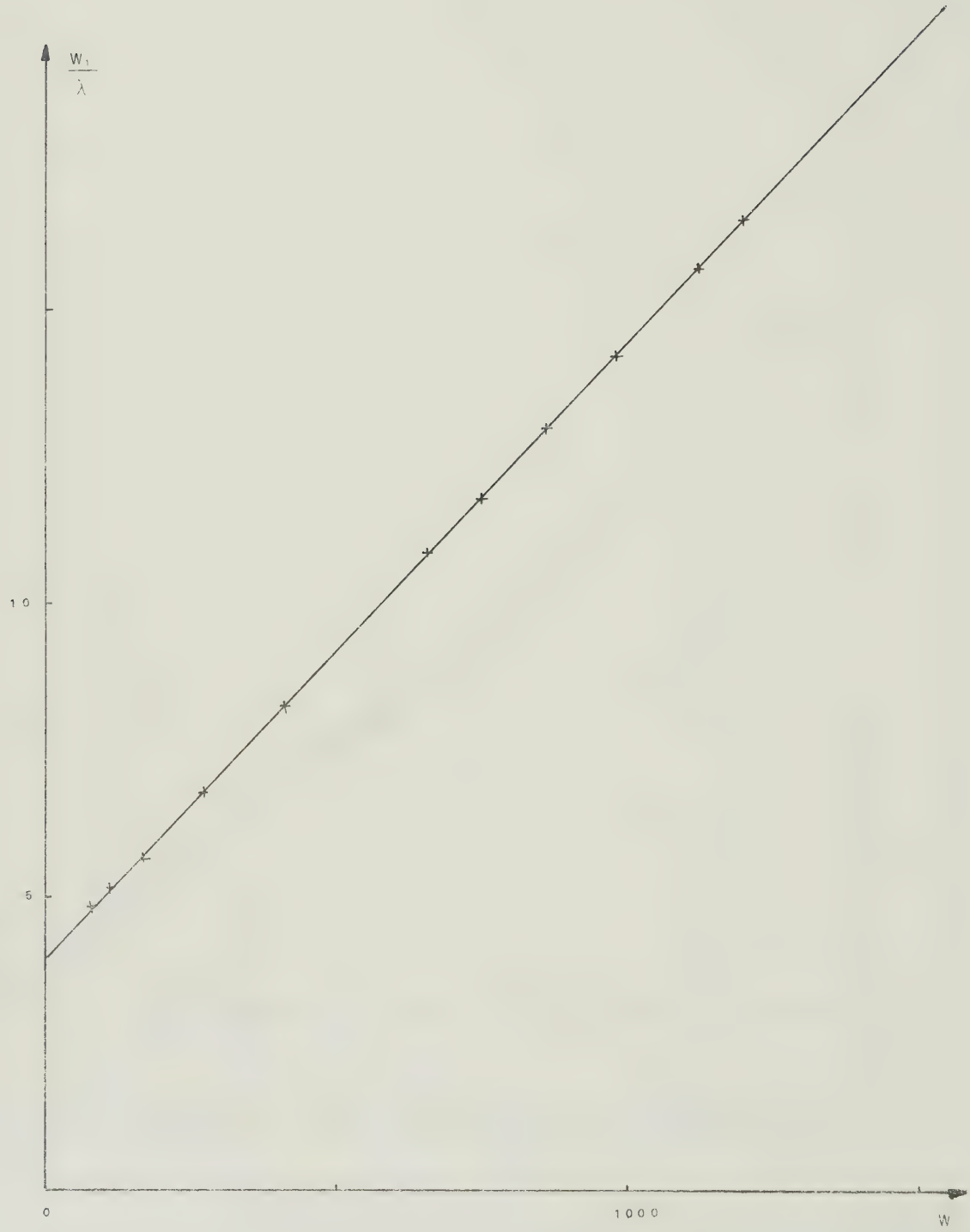

FIGURE A.VI.13. Echantillon N° 6, C.L. C, graphe de Southwell

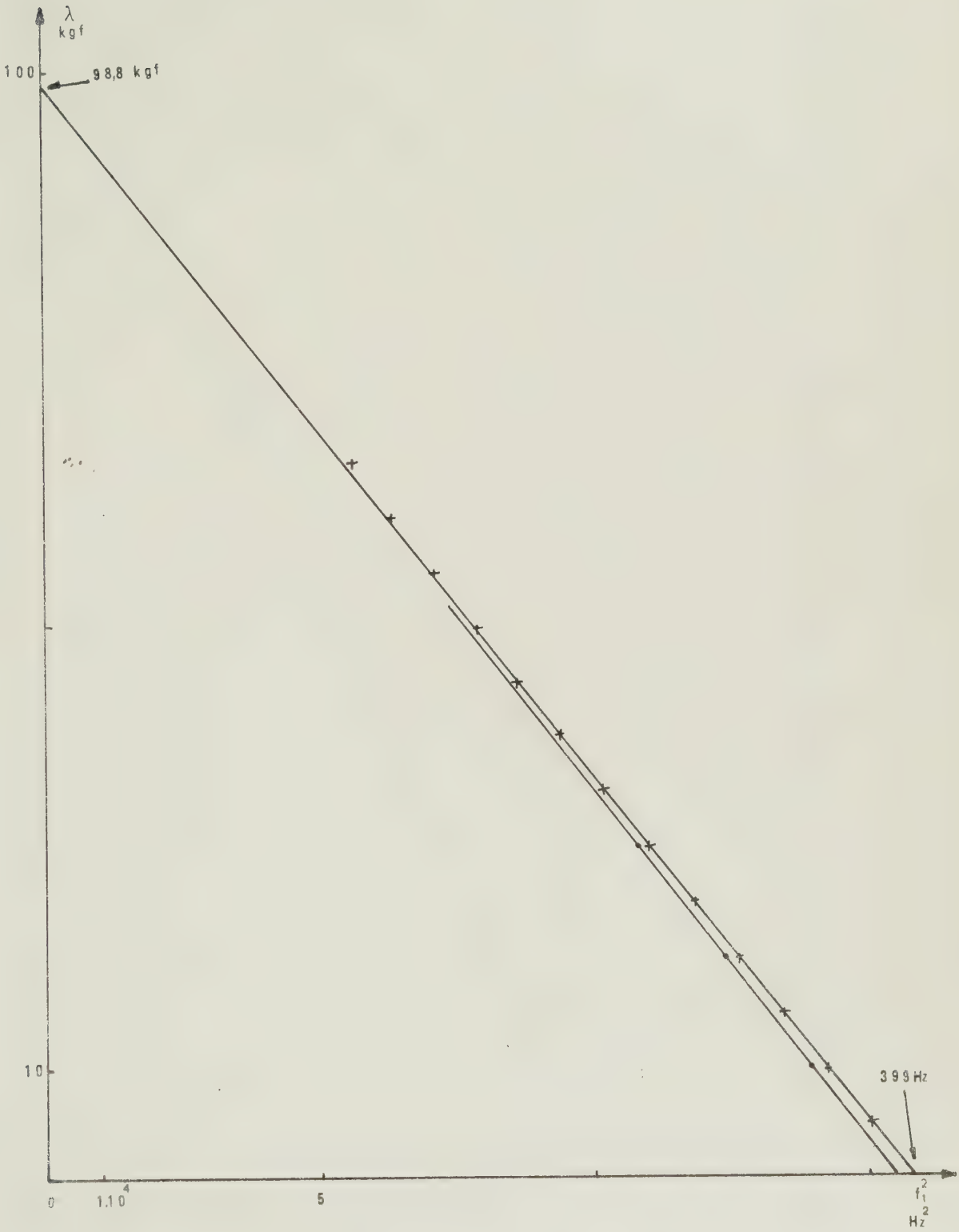

FIGURE A.VI.14. Echantillon N° 6, C.L. B, mesures dynamiques.

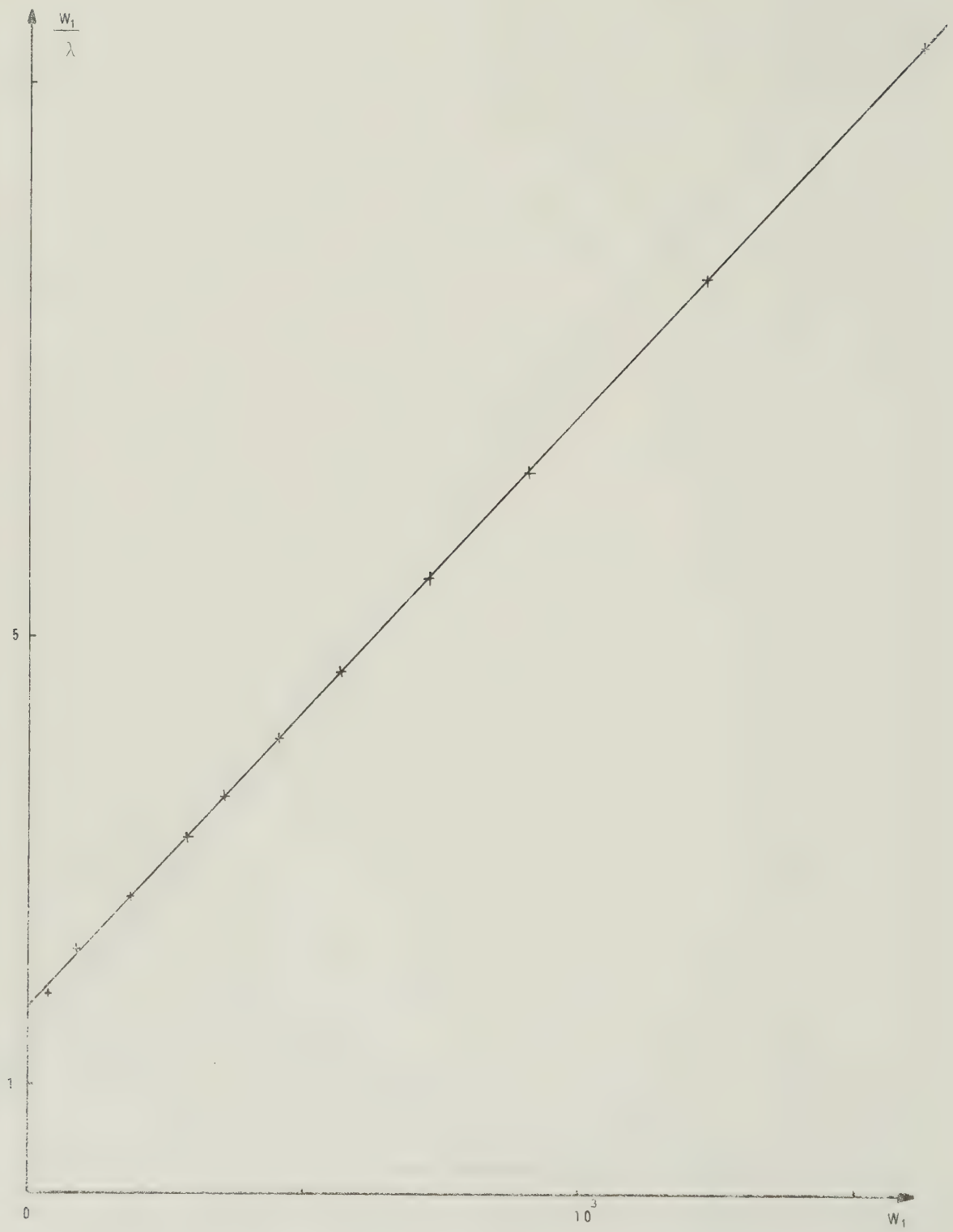

FIGURE A.VI.15. Echantillon N° 6, C.L. B, graphe de Southwell.

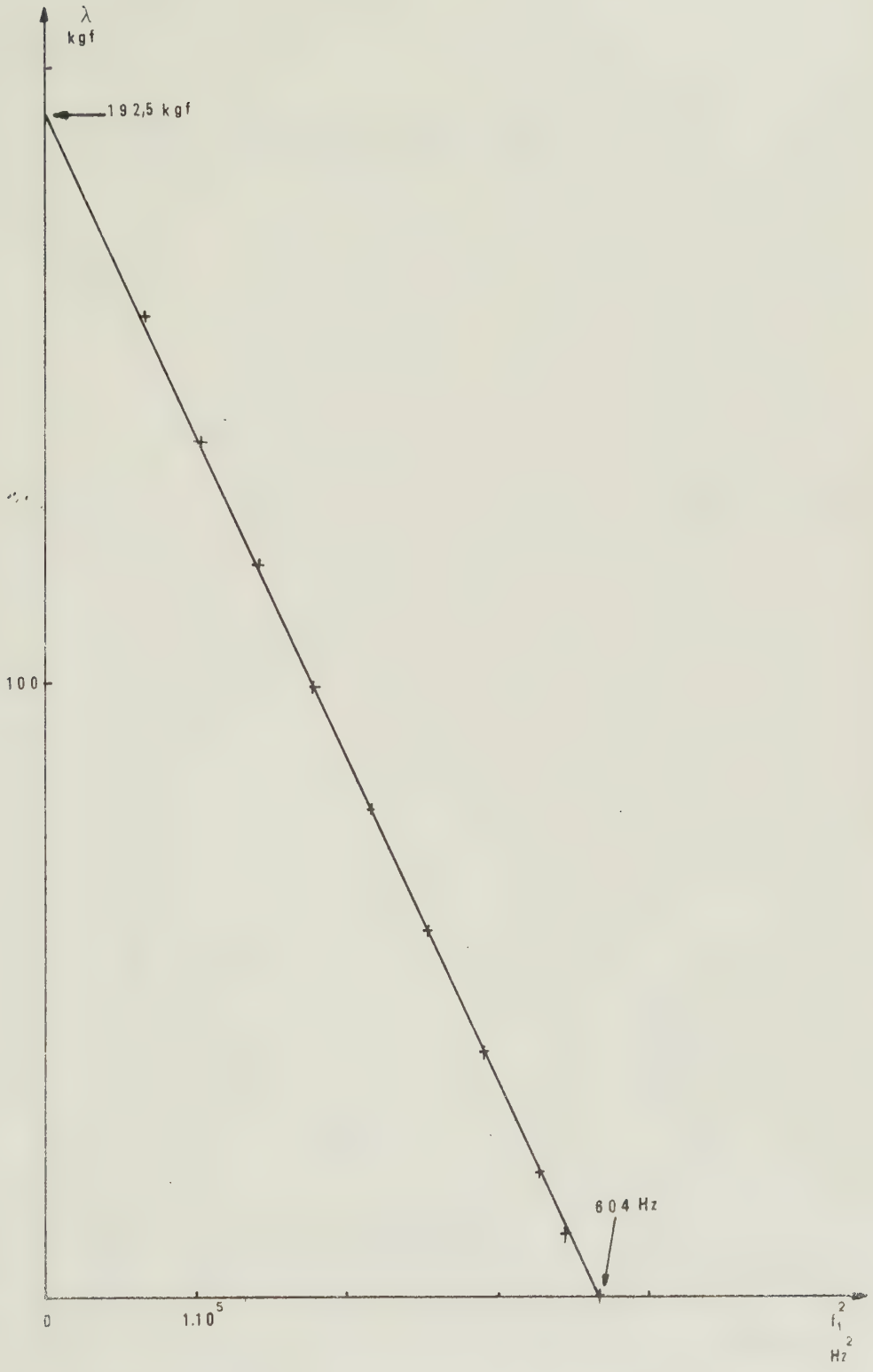

FIGURE A.VI.16. Echantillon N° 6, C.L. D, mesures dynamiques

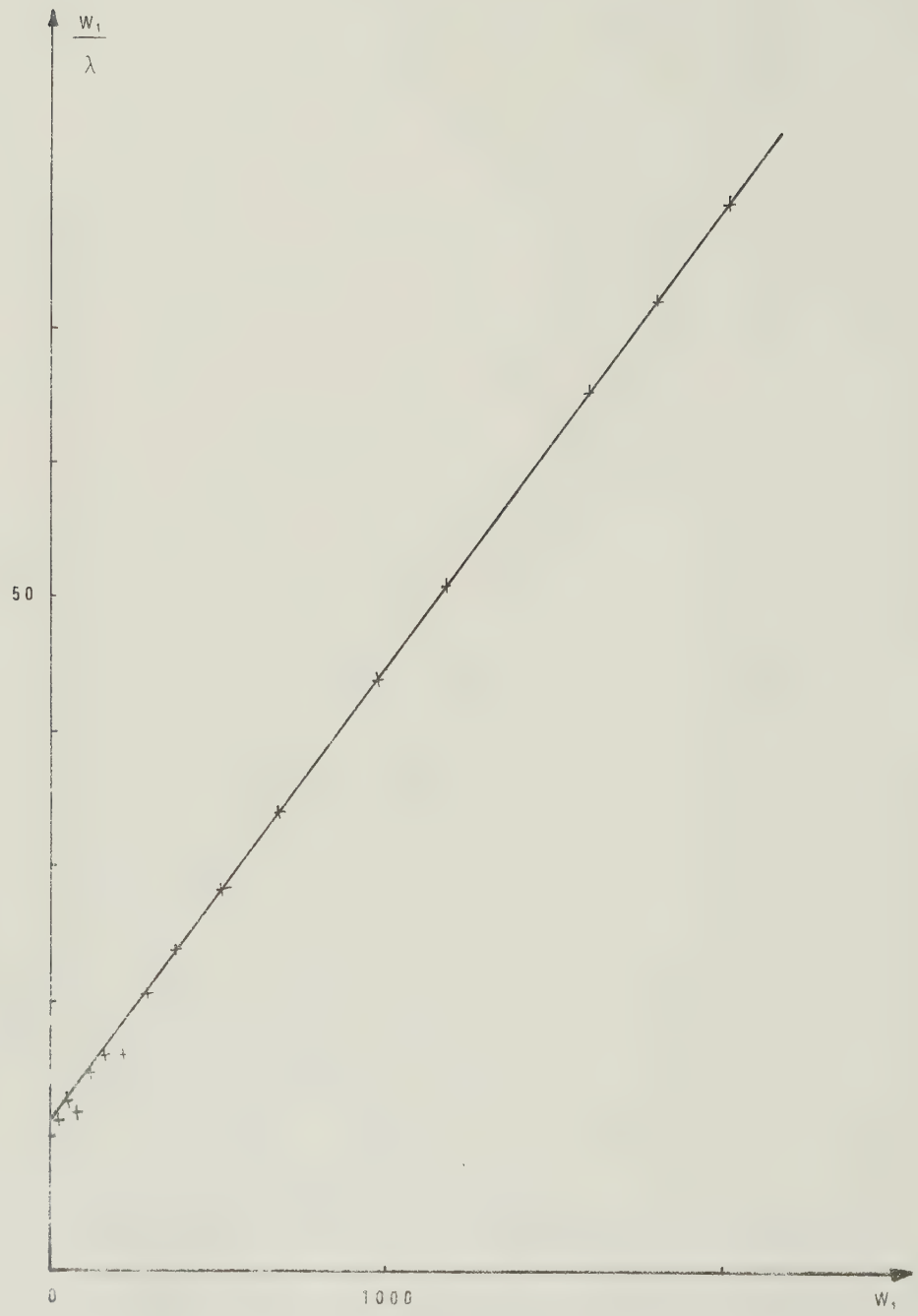

FIGURE A.VI.17. Echantillon N° 11, C.L. B, graphe de Southwell

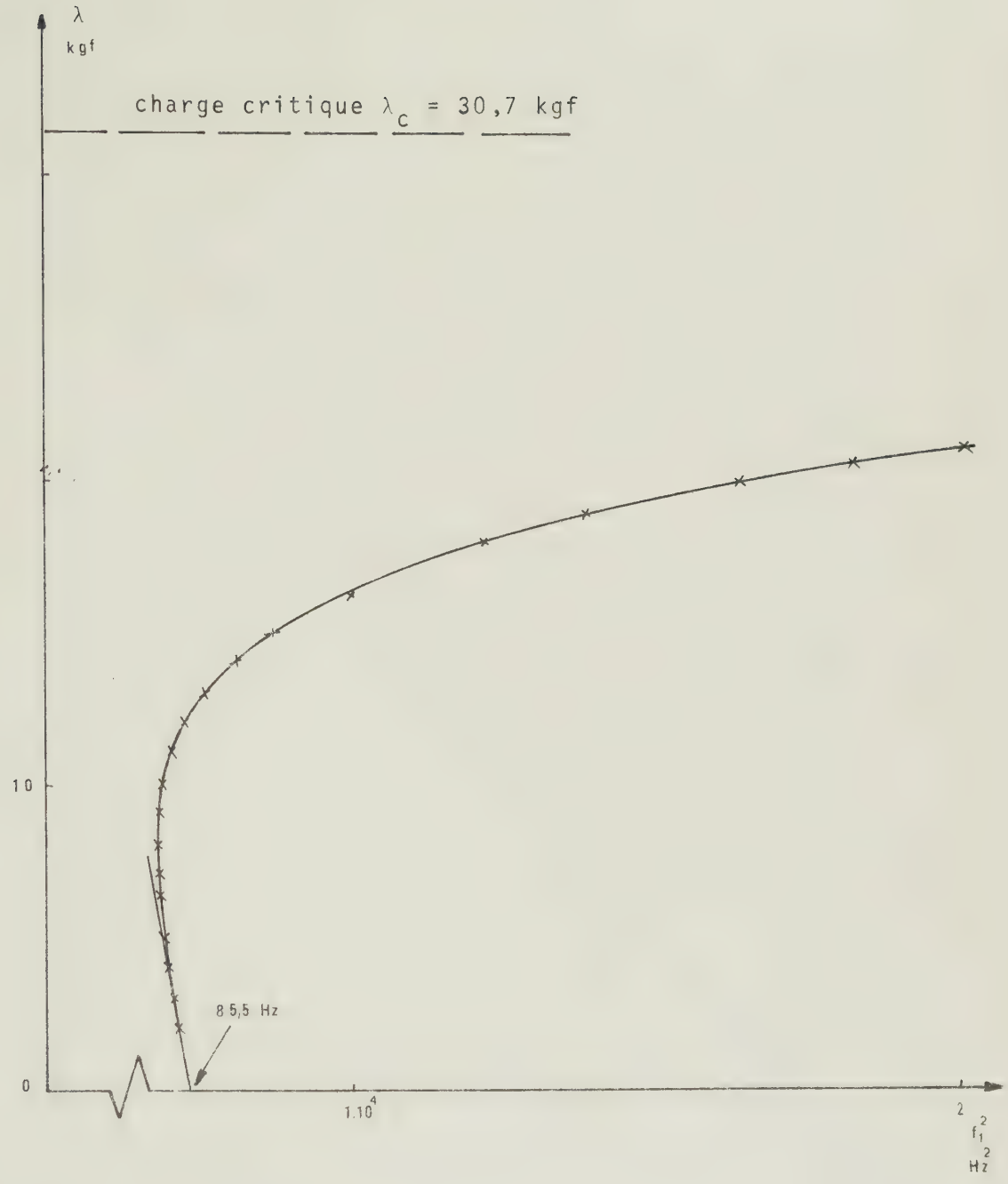

FIGURE A.VI.18. Echantillon N° 11, C.L. B, mesures dynamiques

FIGURE A.VI.19. Echantillon N° 12, C.L. C, graphe de Southwell

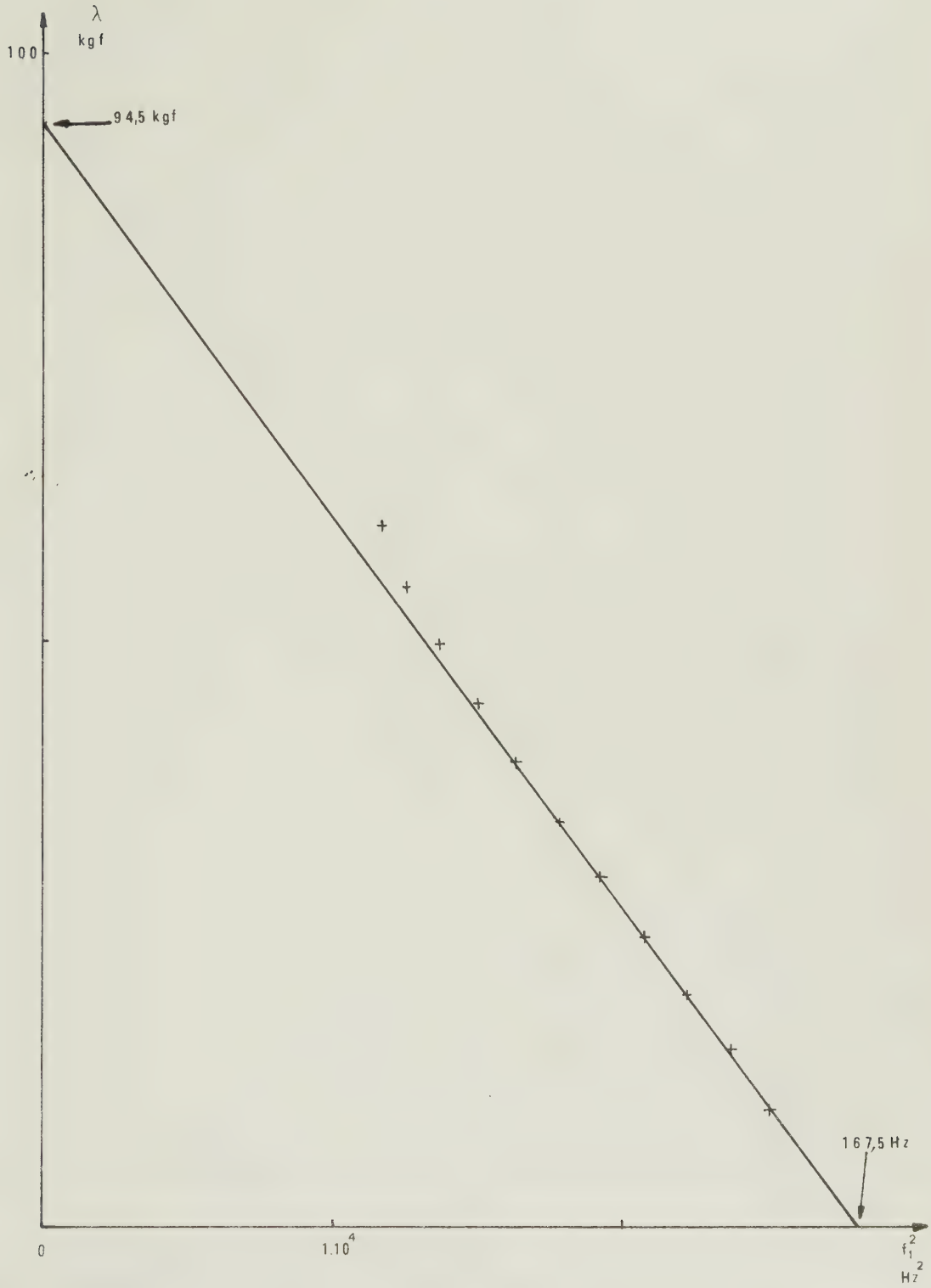

FIGURE A.VI.20. Echantillon N° 12, C.L. C, mesures dynamiques

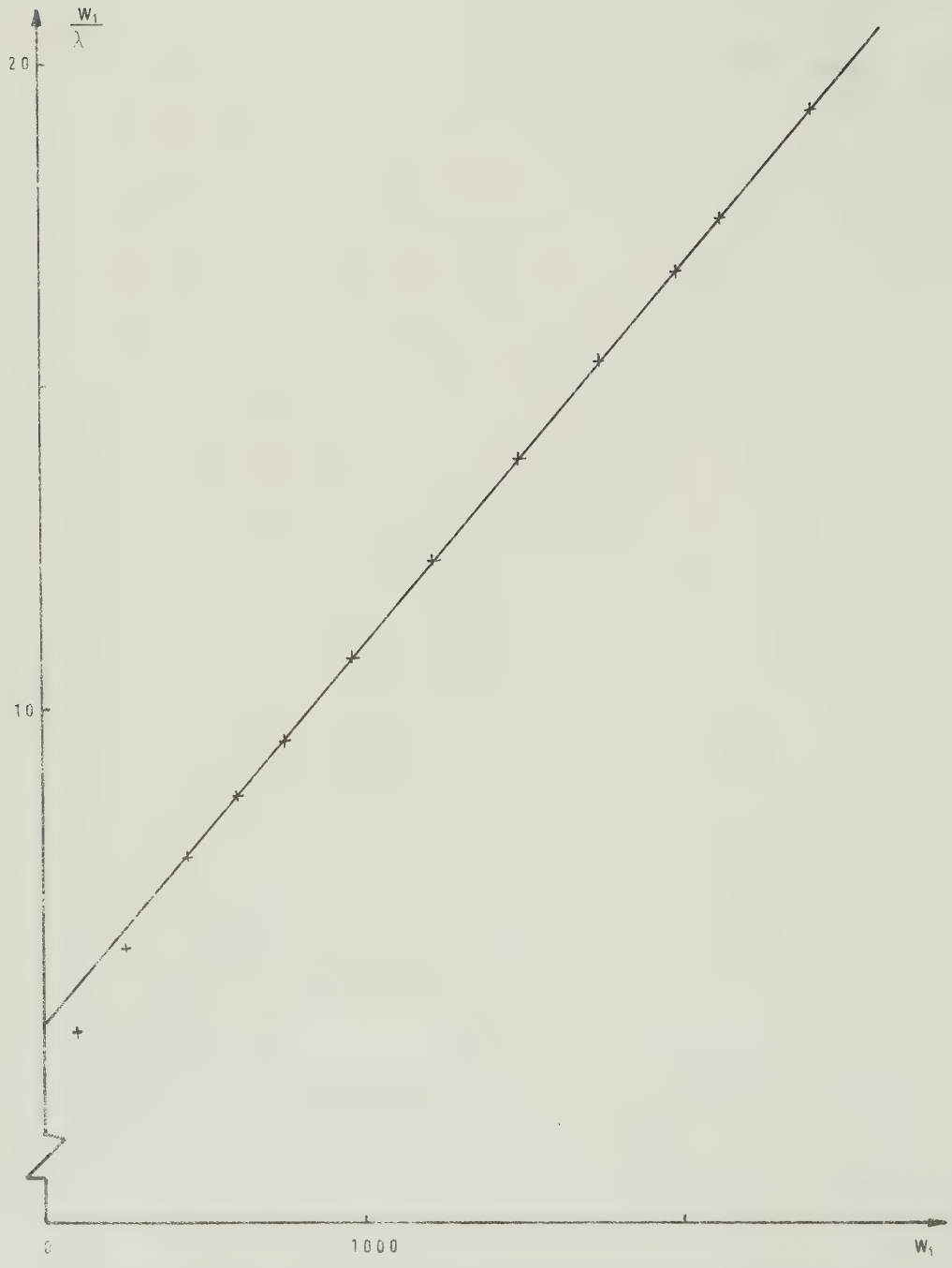

FIGURE A.VI.21. Echantillon N° 12, C.L. D, graphe de Southwell

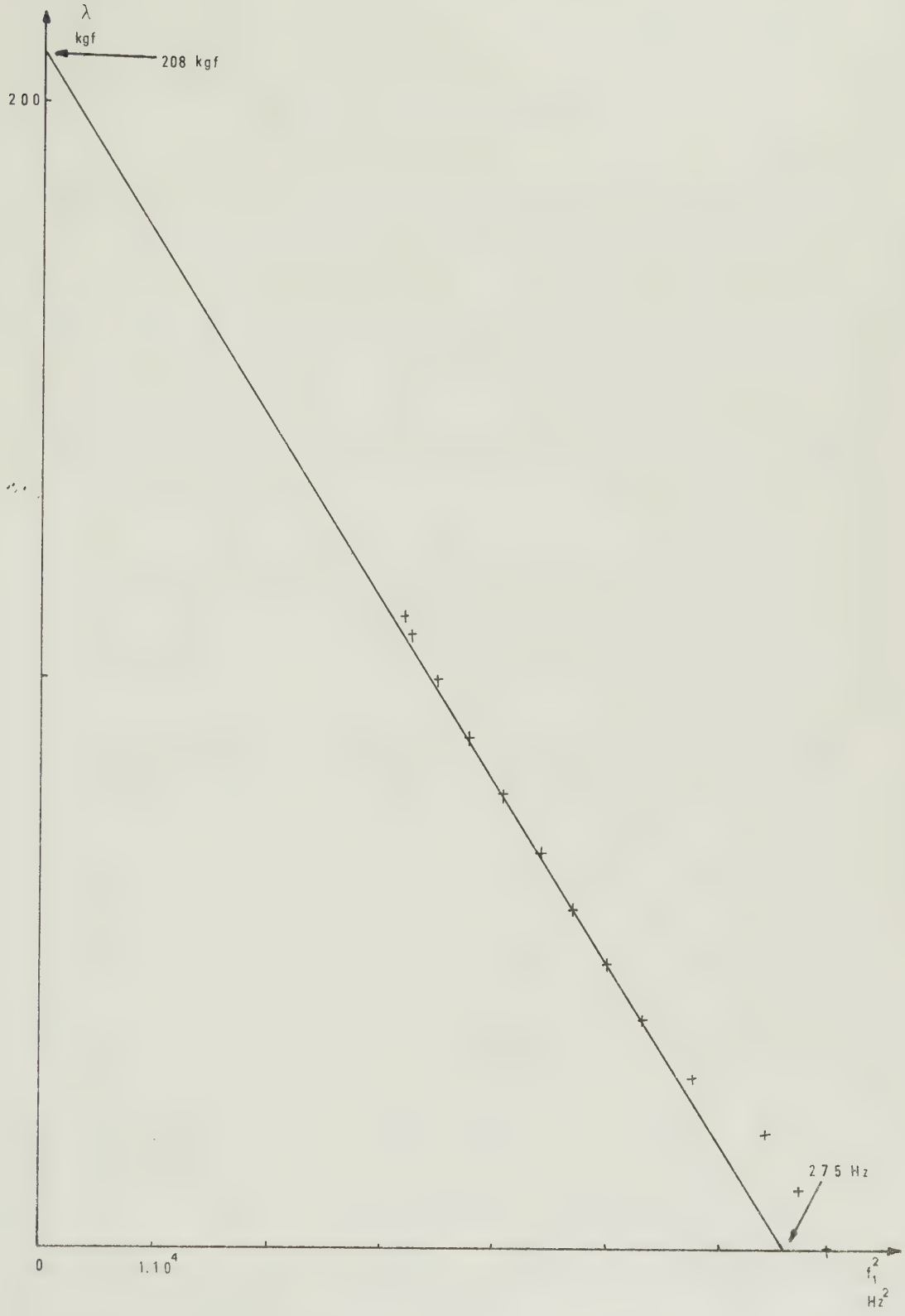

FIGURE A.VI.22. Echantillon N° 12, C.L. D, mesures dynamiques

B I B L I O G R A P H I E

(1) VERCHERY G. - Comportement des matériaux composites à fibres orientées - Journées "Elasticité-Anélasticité" organisées par le G.A.M.I., 24-26 mai 1971

(2) CHARLES G., VERCHERY G. - Problèmes liés à l'orientation et à la symétrie des trames de fibres de renforcement dans un matériau composite à matrice métallique : élaboration et propriétés mécaniques - Communication aux "Journées d'Automne" organisées par la Société Française de Métallurgie, 27 septembre-1er octobre 1971, Paris

(3) DAVIES J.G. - Compressive instability and strength of uniaxial filament reinforced epoxy tubes - NASA TND-5697 (1970)

(4) ASHTON J.E. and LOVE T.S. - Experimental study of the stability of composite plates - J. Composite Mat. 3 (1969) 230

(5) MANDELLJ.F. - An experimental investigation of the Buckling of anisotropic fiber reinforced plastic plates - Air-Force Materials Lab., report No AFML-TR-68-281 (1968)

(6) KICHER T.P. and MANDELL J.F. - An experimental study of the Buckling of anisotropic plates - Technical papers on "Structures and Materials",AIAA/ASME 10th Structures, Structural Dynamics and Material Conference, New-Orleans, april 14-16,(1969)

(7) KICHER T.P. and MANDELL J.F. - A study of the Buckling of laminated composites plates - AIAA Journal 9 (1971) 605

(8) CHAMIS C.C. - Buckling of anisotropic plates - Proc. ASCE J. Struct. Div. 95 (1969) 2119

(9) CHAMIS C.C. - Buckling of Boron-Aluminium and Graphite-Resin fiber composite anisotropic panels - NASA Technical Memorandum, NASA TMX-67880 (1971)

(10) WHITNEY J.M. and LEISSA A.W. - Analysis of heterogeneous anisotropic plates - J. Trans. ASME, série E (J. Appl. Mechan.) 36 (1969) 261

(11) ASHTON J.E. and WHITNEY J.M. - Effect of environment on the elastic response of layered composite plates - AIAA Journal 9 (n°9) (1971) 1708

(12) FRASER H.R. and MILLER R.E. - Bifurcation type Buckling of generally orthotropic clamped plates - AIAA Journal 8 (n°4) (1970) 707

(13) KICHER T.P. - Predicting structural behavior of composites 26th Annual Technical Conference, Reinforced plastic/Composites Division, The Society of the Plastic Industry, Inc. (1972) sect. 20-8

(14) KHOT N.S. - Buckling and postbuckling behavior of composite cylindrical shells under axial compression - AIAA Journal 8 (n°2) (1970) 229

(15) KHOT N.S. - Postbuckling behavior of geometrically imperfect composite cylindrical shells under axial compression - AIAA Journal 8 (n°3) (1970) 579

(16) TASI J. - Effect of heterogeneity on the stability of composite cylindrical shells under axial compression - AIAA Journal 4 (N°6) (1966) 1058

(17) LEKHNITSKII S.G. - Anisotropic plates - Second Edit., Ogiz, Moscou-Leningrad (1947), Edition en langue anglaise traduite par S.W Tsai et T. Cheron, Gordon and Breach (1968)

(18) REISSNER E. and STAVSKY Y. - Bending and stretching of certain type of heterogeneous aelotropic elastic plates - J. Appl. Mech. (trans. ASME) série E, 28 (1961) 402

(19) STAVSKY Y. - Bending and stretching of laminated aelotropic plates - Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 84 (1961) 31

(20) DONG S.B., PISTER K.S. and TAYLOR R.L. - On the theory of laminated anisotropic shells and plates - J. Aerospace Sci. 29, (n°8) (1962) 969

(21) AMBARTSUMYAN S.A. - Theory of anisotropic shells - Moscou 1961

(22) ASHTON J.E., HALPIN J.C. and PETIT P.H. - Primer on composite materials : analysis - Progress in Material Sciences Series, Technomic Publ. Co. (1969)

(23) EULER L. - Methodus inveniandi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti - Additamentum 1, De curvis elasticis (1794), Marcus-Michaelus Bousquet, p. 267, Lausanne et Geneve

(24) CHAILLEUX A. - Stabilité des systèmes élastiques - Séminaires Internes du Groupe Commun ENSMP-ENSTA, novembre 1971

(25) ENIE R.B. and RIZZO R.R. - Three dimentional laminate moduli - J. Composite Mat. 4 (n°1) (1970) 150

(26) FERTÉ J.-P. et VILLAMAYOR M. - Dilatation des matériaux composites Bore-Aluminium - Fibre Sci. & Techn. 4 (n°1) (1971) 49

(27) CHAILLEUX A. et FERTÉ J.-P. - Etude théorique et expérimentale du couplage thermoélastique dans les plaques composites - Fibre Sci. & Techn. 5 (1972), juillet, pp 173-196

(28) CHAILLEUX A. - Tests de flexion sur matériaux composites. Mesure de coefficients d'élasticité - Centre des Matériaux de l'E.N.S.M.P., rapport interne n° CRI-DCO-AC-1 (août 1970)

(29) HUNEAU J. - Rapport, 2e partie - Contrat D.A.M. N° 2635/R : matériaux. Rapport interne (octobre 1971)

(30) DORIATH J.-C., FERTÉ J.-P. et LE FLOC'H A. - Mesure du frottement intérieur, des rigidités en torsion et en flexion des matériaux composites à fibres continues - Centre des Matériaux, rapport interne (octobre 1970)

(31) LANDAU L. & LIFCHITZ E. - Théorie de l'élasticité - Physique théorique, tome VII, Editions de Moscou 1967

(32) MARGUERRE K. and WOERNLE H.T. - Elastic plates - Blaisdell Publ. Co, Waltham (Mass.) - 1969

(33) ZIEGLER H. - Principles of structural stability - Blaisdell Publ. Co., Waltham (Mass.) - 1968

(34) CHAILLEUX A., HANS Y. - Etude théorique et expérimentale de la stabilité élastique des poutres et plaques en matériaux composites - Rapport interne ENSTA-ENSMP, Groupe Commun de Recherche en Matériaux*, parties I, III et V (1972)

(35) MUSKHELISHVILI N.I. - Some basic problem of the mathematical theory of elasticity - 4e ed. (1954), Noordhoff Ltd, 1963

(36) TIMOSHENKO S. - Théorie de la stabilité élastique, 2e Edition, Dunod, Paris (1966)

(37) YOUNG T. - A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts - 1ère édition, Vol. II, sect. IX, London (1807) p. 47

(38) AYRTON W.E. and PERRY J. - On struts - The Engin. 62 (1886) 464-465 & 513-515

(39) WESTERGAARD H.M. - Buckling of elastic structures - Trans. ASCE 85 (1922) 576

(40) SOUTHWELL R.V. - On the analysis of experimental observation in problems of elastic stability - Proc. Royal Soc., London A135 (1932) 601

(41) VON KARMAN T. - Huntersuchunger über Knickfestigkeit, Mitteilunger über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 81 (1910)

(42) LUNDQUIST E.E. - Generalized analysis of experimental observations in problems of elastic stability - NACA Technical Note 658 (1938)

(43) FISHER H.R. - An extension of Southwell's method of analysing experimental observations in problems of elastic stability - Proc. Royal. Soc. London A144 (1934)609

(44) DONNELL L.H. - On the application of Southwell's method for the analysis of Buckling tests - Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume, McGraw-Hill Book Co., (1938)

* 32, boulevard VICTOR
75015 PARIS (3e étage)

(45) HAYASHI T. and KIMIRA M. - On a method of experimental determination of the Buckling load of an elasticity supported column - Paper presented at Japan Congress of Testing Materials, Kyoto, Japan, sept. 1966

(46) ARIARATNAM S.T. - The Southwell method for predicting critical load of elastic structures - Quart. J. Mech. & Appl. Math. 14 (1961) 137

(47) GOUGH H.J. and COX H.L. - Some tests on the stability of thin strip material under shearing forces - Proc. Royal Soc., London A137 (1932) 145

(48) HORTON W.H., CUNDARI F.L. and JOHNSON R.W. - The analysis of experimental data obtained from stability studies on elastic column and plate strcutures - Israel J. Techn. 5 (n° 1-2) (1967) 104

(49) LEICESTER R.H. - Southwell plot for beam-columns - Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. EM6 (dec. 1970) 945

(50) HORTON W.H. and CUNDARI F.L. - On the applicability of the Southwell plot to the interpretation of test data obtained from instability studies of shells bodies - Proc. AIAA/ASME 8th Structures, Structural Dynamics and Material Conference, Palm Springs, Calif. American Inst. Aero Astro., N.Y. (1967) p. 651

(51) FLUGGE W. - Stresses in shells - Springer Verlag, Berlin (1960)

(52) KJAR A.R. - Southwell plot extensions - Inst. Eng. Australia Civil Engineering Trans. 10 (oct. 1968) 137

(53) ROORDA J. - Some thoughts on the Southwell plot - Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 93 (n° EM6) (dec. 1967) 87

(54) LURIE H. - Lateral vibrations as related to structural stability - Trans ASME, J. Appl. Mech. 3, n° 2 (juin 1952) 195

(55) JACOBSON M.J. and WENNER M.L. - Predicting buckling loads from vibrations data - Exp. Mechan. (oct. 1968) pp. 35N-38N

(56) WILSON J.F., HOLLOWAY D.M. and BIGGERS S.B. - Stability experiments on the strongest columns and circular arches - Exp. Mechanics 11 (n°7) (1971) 303

(57) REISS E.L. and MATKOWSKY - Nonlinear dynamic buckling of a compressed elastic column, - Quart. Appl. Math. 29 (n°2) (1971) 245

(58) GELEZNIKOFF F. et VERCHERY G. - Les fréquences propres de vibration transversales d'une poutre appuyée-appuyée sous charge axiale : revue critique des études théoriques et études expérimentales - Rapport ENSTA-ENSMP, Groupe Commun de Recherche en Matériaux (juillet 1972)

(59) TSENG W.Y. and DUGUNDJI J. - Nonlinear vibrations of a buckled beam under harmonic excitations - Trans. ASME, J. Appl. Mechan. 93 (1971) 467

Nom de l'Etudiant : Alain CHAILLEUX

Nature de la thèse: Docteur-Ingénieur

Titre de la thèse : ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DE LA STABILITE DE POUTRES DROITES ELASTIQUES EN MATERIAUX COMPOSITES CHARGEES AXIALEMENT.

Vu, Approuvé

et permis d'imprimer ;

Paris, le